

Отборочный этап. 7 класс

Задача 1 / 1. На испытательном стенде для изучения равновесия механических систем используется невесомая горизонтальная штанга, установленная на идеальном шарнире в точке O (шарнир расположен не в середине штанги). Слева от O в узлах A и B (причём A ближе к O , чем B) закреплены два калибровочных модуля масс $7m$ и $5m$ соответственно. Справа от O в узле C закреплён модуль массы $8m$. Штанга находится в равновесии, при этом $OC = 4OA$. Найдите отношение $\frac{AB}{OA}$. Ответ дайте с точностью до целого числа.

Возможное решение

Обозначим $OA = h$, $AB = x$. Тогда $OB = h + x$, а из условия $OC = 4h$. Запишем условие равновесия моментов относительно точки O :

$$8m \cdot OC = 7m \cdot OA + 5m \cdot OB.$$

Подставим выражения для расстояний:

$$8m \cdot 4h = 7m \cdot h + 5m \cdot (h + x).$$

Сократим на m и упростим:

$$32h = 7h + 5h + 5x = 12h + 5x,$$

$$20h = 5x, \quad x = 4h.$$

Следовательно,

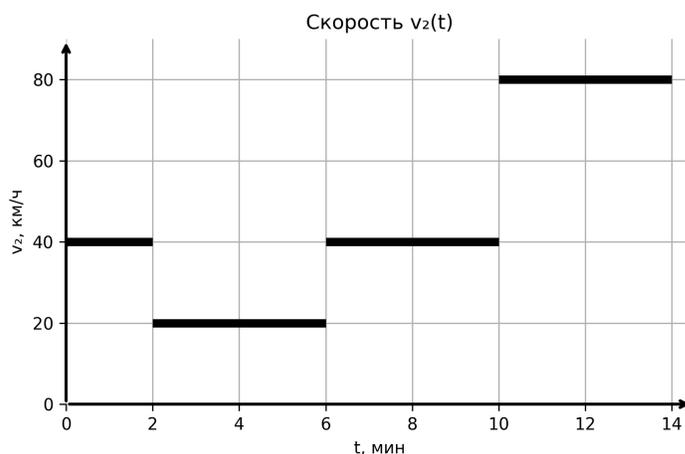
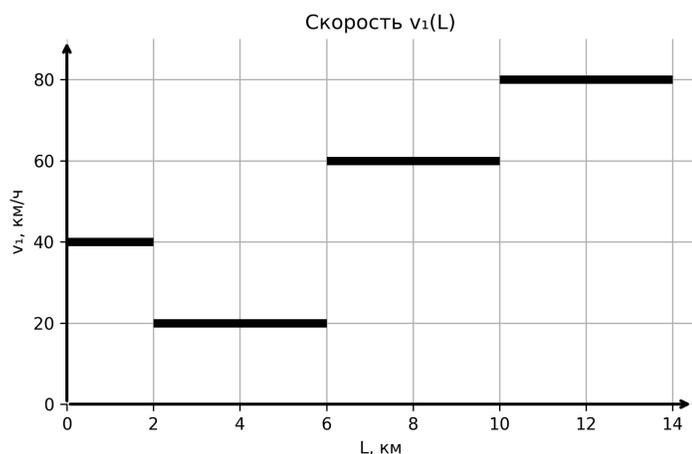
$$\frac{AB}{OA} = \frac{x}{h} = 4.$$

Ответ: 4.

Задача 1 / 2. На испытательном стенде для изучения равновесия механических систем используется невесомая горизонтальная штанга, установленная на идеальном шарнире в точке O (шарнир расположен не в середине штанги). Слева от O в узлах A и B (причём A ближе к O , чем B) закреплены два калибровочных модуля масс $6m$ и $2m$ соответственно. Справа от O в узле C закреплён модуль массы $5m$. Штанга находится в равновесии, при этом $OC = 4OA$. Найдите отношение $\frac{AB}{OA}$. Ответ дайте с точностью до целого числа.

Ответ: 6.

Задача 3 / 1. Два автомобиля одновременно выехали навстречу друг другу по прямой дороге из двух населённых пунктов. Регистратор первого автомобиля записывает скорость v_1 в зависимости от пройденного пути L , а регистратор второго — скорость v_2 в зависимости от времени движения t . Показания регистраторов приведены на графиках. Известно, что через 10 минут после начала движения автомобили встретились. Какое расстояние между автомобилями будет через 2 минуты после встречи? Ответ дайте в километрах с точностью до десятых.



Возможное решение

Опишем аналитически зависимость $v_1(L)$, используя значения из первого графика:

$$v_1 = \begin{cases} 40, & 0 \leq L < 2, \\ 20, & 2 \leq L < 6, \\ 60, & 6 \leq L < 10, \\ 80, & 10 \leq L \leq 14, \end{cases} \quad (\text{км/ч})$$

а зависимость $v_2(t)$ опишем аналитически, используя второй график (время t в минутах):

$$v_2 = \begin{cases} 40, & 0 \leq t < 2, \\ 20, & 2 \leq t < 6, \\ 40, & 6 \leq t < 10, \\ 80, & 10 \leq t \leq 14, \end{cases} \quad (\text{км/ч}).$$

Автомобили встретились через 10 минут, то есть через $\frac{1}{6}$ часа.
Сначала первый автомобиль прошёл 2 км со скоростью 40 км/ч:

$$t_1 = \frac{2}{40} \text{ ч} = 0,05 \text{ ч} = 3 \text{ мин.}$$

До встречи остаётся $10 - 3 = 7$ минут. На участке $2 \leq L < 6$ первый автомобиль движется со скоростью 20 км/ч, поэтому за 7 минут он проедет

$$\Delta L = 20 \cdot \frac{7}{60} = \frac{7}{3} \text{ км,}$$

и к моменту встречи его путь равен

$$L_{\text{встр}} = 2 + \frac{7}{3} = \frac{13}{3} \text{ км.}$$

Значит, в момент встречи первый автомобиль всё ещё находится на участке со скоростью 20 км/ч и в ближайшие 2 минуты скорость не изменится (до $L = 6$ км ему осталось $\frac{5}{3}$ км, на это нужно 5 минут).

Через 2 минуты после встречи ($\frac{2}{60} = \frac{1}{30}$ часа):

$$s_1 = 20 \cdot \frac{1}{30} = \frac{2}{3} \text{ км.}$$

Для второго автомобиля после $t = 10$ минут скорость равна 80 км/ч, поэтому за 2 минуты он проедет

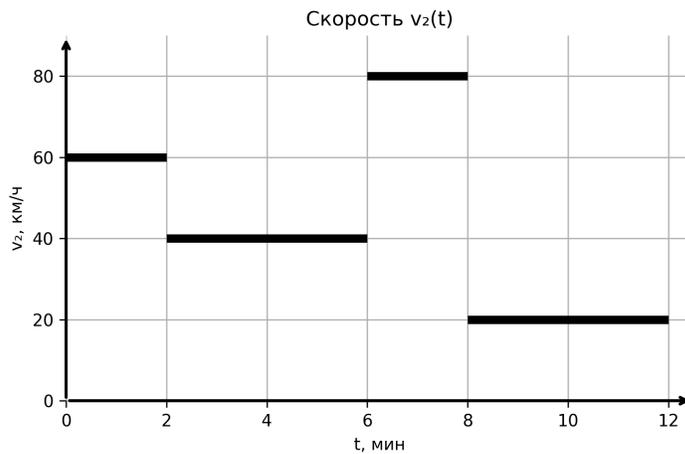
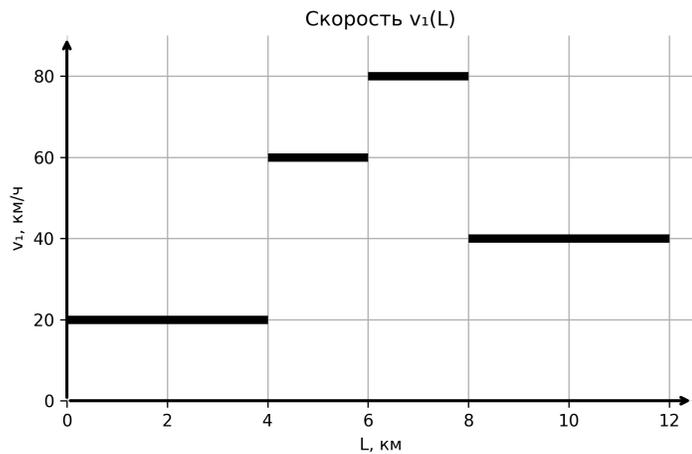
$$s_2 = 80 \cdot \frac{1}{30} = \frac{8}{3} \text{ км.}$$

Так как после встречи автомобили разъезжаются в противоположные стороны, расстояние между ними через 2 минуты равно

$$S = s_1 + s_2 = \frac{2}{3} + \frac{8}{3} = \frac{10}{3} \text{ км.}$$

Ответ: $\frac{10}{3}$ км $\approx 3,3$ км.

Задача 3 / 2. Два автомобиля одновременно выехали навстречу друг другу по прямой дороге из двух населённых пунктов. Регистратор первого автомобиля записывает скорость v_1 в зависимости от пройденного пути L , а регистратор второго — скорость v_2 в зависимости от времени движения t . Показания регистраторов приведены на графиках. Известно, что через 10 минут после начала движения автомобили встретились. Какое расстояние между автомобилями будет через 2 минуты после встречи? Ответ дайте в километрах с точностью до десятых.



Ответ: $\frac{4}{3}$ км $\approx 1,3$ км.

Задача 4 / 1. Цилиндрический поплавок плавает в воде, находясь в вертикальном положении, при этом длина погруженной части поплавка равна $h_0 = 12$ см. Если к нижнему концу поплавка прикрепить груз (груз полностью находится в воде), то длина погруженной части поплавка станет равна $h_1 = 18$ см. Если тот же груз снять и положить на верхнее основание поплавка, то груз остаётся над водой (поплавок не наклоняется, вода не покрывает верхнее основание поплавка), а длина погруженной части поплавка станет равна $h_2 = 20$ см. Плотность воды равна $\rho = 1000$ кг/м³. Найдите плотность ρ_r материала груза. Ответ дайте в кг/м³ с точностью до целого числа.

Возможное решение

Пусть S – площадь поперечного сечения поплавка, m_0 – масса поплавка, V – объём груза, m – масса груза.

В исходном положении сила тяжести и сила Архимеда, действующие на поплавок, уравновешивают друг друга:

$$\rho g S h_0 - m_0 g = 0, \quad (1)$$

(1) *Груз прикреплен снизу и полностью в воде.*

В данном состоянии условие равновесия поплавка с грузом запишется в виде:

$$\rho g h_1 S + \rho g V - m_0 g - m g = 0. \quad (2)$$

(2) *Груз лежит сверху и не погружен в воду.*

В данном состоянии условие равновесия поплавка с грузом видоизменяется, так как груз не погружен в жидкость, следовательно, на него действует только сила тяжести:

$$\rho g h_2 S - m_0 g - m g = 0. \quad (3)$$

Вычтем из уравнения (3) уравнение (1), чтобы получить выражение для массы груза:

$$\rho g h_2 S - m_0 g - m g - (\rho g S h_0 - m_0 g) = 0 \implies m = \rho (h_2 - h_0) S.$$

Вычтем из уравнения (3) уравнение (2), чтобы получить выражение для объёма груза:

$$\rho g h_2 S - m_0 g - m g - (\rho g h_1 S + \rho g V - m_0 g - m g) = 0 \implies V = (h_2 - h_1) S.$$

Тогда плотность груза:

$$\rho_r = \frac{m}{V} = \frac{\rho (h_2 - h_0)}{h_2 - h_1} = 4000 \text{ кг/м}^3$$

Ответ: $\rho_r = 4000 \text{ кг/м}^3$.

Задача 4 / 2 Цилиндрический поплавок плавает в воде, находясь в вертикальном положении, при этом длина погруженной части поплавка равна $h_0 = 10$ см. Если к нижнему концу поплавка прикрепить груз (груз полностью находится в воде), то длина погруженной части поплавка станет равна $h_1 = 14$ см. Если тот же груз снять и положить на верхнее основание поплавка, то груз остаётся над водой (поплавок не наклоняется, вода не покрывает верхнее основание поплавка), а длина погруженной части поплавка станет равна $h_2 = 18$ см. Плотность воды равна $\rho = 1000$ кг/м³. Найдите плотность ρ_r материала груза. Ответ дайте в кг/м³ с точностью до целого числа.

Ответ: 2000 кг/м^3 .

Задача 5 / 1. Экспериментатор Глюк приобрёл необычные сувенирные часы. Из-за дефекта механизма минутная стрелка движется неравномерно: первую половину круга (от «12» до «6») она проходит с угловой скоростью $\omega_1 = 450^\circ/\text{ч}$, а вторую половину круга (от «6» до «12») — со скоростью $\omega_2 = 900^\circ/\text{ч}$. На сколько минут реального времени будут спешить такие часы за каждый час своего «собственного» времени? Ответ дайте с точностью до целого числа.

Теоретическая справка: Угловая скорость ω минутной стрелки — физическая величина, равная: $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$, где $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ — изменение между начальным (φ_1) и конечным (φ_2) положением минутной стрелки, а $\Delta t = t_2 - t_1$ — промежуток времени прошедший от начального (t_1) до конечного (t_2) момента движения стрелки.

Возможное решение

Полный оборот минутной стрелки соответствует углу 360° . Таким образом, каждая половина круга составляет $\alpha = 180^\circ$.

Найдем время (в реальных часах), затраченное на прохождение каждой половины круга:

$$T_1 = \frac{\alpha}{\omega_1} = \frac{180}{450} = 0,4 \text{ ч,}$$

$$T_2 = \frac{\alpha}{\omega_2} = \frac{180}{900} = 0,2 \text{ ч.}$$

Суммарное реальное время одного полного оборота стрелки составляет:

$$T = T_1 + T_2 = 0,4 + 0,2 = 0,6 \text{ ч.}$$

Переведем это значение в минуты: $0,6 \times 60 = 36$ минут.

В исправных часах минутная стрелка совершает полный оборот ровно за 60 минут. Часы Глюка совершают оборот за 36 минут реального времени. Следовательно, за каждый свой «час» они будут спешить на:

$$\Delta t = 60 - 36 = 24 \text{ минуты.}$$

Ответ: 24 мин.

Задача 5 / 2. Экспериментатор Глюк приобрёл необычные сувенирные часы. Из-за дефекта механизма минутная стрелка движется неравномерно: первую половину круга (от «12» до «6») она проходит с угловой скоростью $\omega_1 = 360^\circ/\text{ч}$, а вторую половину круга (от «6» до «12») — со скоростью $\omega_2 = 720^\circ/\text{ч}$. На сколько минут реального времени будут спешить такие часы за каждый час своего «собственного» времени? Ответ дайте с точностью до целого числа.

Теоретическая справка: Угловая скорость ω минутной стрелки — физическая величина, равная: $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$, где $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ — изменение между начальным (φ_1) и конечным (φ_2) положением минутной стрелки, а $\Delta t = t_2 - t_1$ — промежуток времени прошедший от начального (t_1) до конечного (t_2) момента движения стрелки.

Ответ: 15 мин.