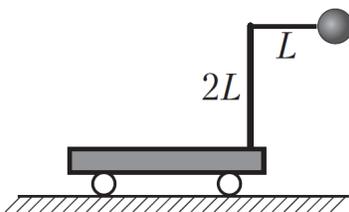


Отборочный этап. 10 класс

Задача 1 / 1. Шарик массы $m = 210$ г подвешен на нити длины $L = 1,0$ м к перекладине, закреплённой на длинной тележке массой $M = 1,0$ кг. Высота перекладины равна $2L$. Тележка может свободно перемещаться по горизонтальной плоскости, не опрокидываясь. Нить отклонили на угол 90° и отпустили. Когда шарик оказался в нижней точке, нить оборвалась. На каком расстоянии s от основания перекладины шарик упадёт на тележку? Ответ дайте в метрах с точностью до десятых.



Трением пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Возможное решение

Рассмотрим движение шарика и тележки после того, как нить была отпущена. Пока нить не оборвалась, система «шарик + тележка» замкнута вдоль оси Ox . Следовательно, выполняется закон сохранения проекции импульса на ось Ox и закон сохранения энергии.

В момент, когда нить занимает вертикальное положение и готова оборваться, вся потенциальная энергия шарика превращается в кинетическую энергию шарика и тележки:

$$mgL = \frac{Mv^2}{2} + \frac{mu^2}{2},$$

где u — скорость шарика, а v — скорость тележки.

Из закона сохранения проекции импульса:

$$0 = mu - Mv.$$

Отсюда $v = \frac{m}{M}u$.

Подставим это выражение в уравнение энергии:

$$mgL = \frac{M}{2} \left(\frac{m^2 u^2}{M^2} \right) + \frac{mu^2}{2},$$

$$mgL = \frac{mu^2}{2} \left(1 + \frac{m}{M} \right).$$

Отсюда:

$$u = \sqrt{\frac{2gLm}{M+m}}, \quad v = \frac{m}{M}u = \sqrt{\frac{2gLm^2}{M(M+m)}}.$$

После обрыва нити шарик начинает движение по параболе, падая с высоты L (высота над уровнем тележки). Время падения определяется по формуле:

$$t = \sqrt{\frac{2L}{g}}.$$

Горизонтальное перемещение шарика относительно земли:

$$x_{\text{ш}} = ut,$$

а тележки:

$$x_{\text{т}} = vt.$$

Итак, расстояние между шариком и тележкой в момент падения шарика на тележку:

$$s = x_{\text{ш}} + x_{\text{т}} = (u + v)t.$$

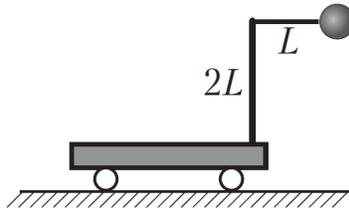
Подставим найденные значения скоростей и времени:

$$s = (u + v)t = 2L\sqrt{\frac{m+M}{M}}.$$

Ответ: 2,2 м;

Задача 1 / 2.

Шарик массы $m = 410$ г подвешен на нити длины $L = 1,0$ м к перекладине, закреплённой на длинной тележке массой $M = 4,0$ кг. Высота перекладины равна $2L$. Тележка может свободно перемещаться по горизонтальной плоскости, не опрокидываясь. Нить отклонили на угол 90° и отпустили. Когда шарик оказался в нижней точке, нить оборвалась. На каком расстоянии s от основания перекладины шарик упадёт на тележку? Ответ дайте в метрах с точностью до десятых.



Трением пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Ответ: 2,1 м.

Задача 2 / 1. Тонкий однородный стержень массы $m = 1,9$ кг и длины $l = 152$ см одним концом опирается на гладкий горизонтальный пол, а вторым опирается на гладкую вертикальную стену. Стержень удерживается в равновесии с помощью горизонтальной пружины, соединяющей нижний конец доски с основанием стены. Жесткость пружины $k = 28 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$, удлинение пружины в состоянии равновесия системы $\Delta x = 10$ см. Ускорение свободного падения $g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Найдите длину пружины l_0 в нерастянутом состоянии. Ответ дайте в сантиметрах с точностью до целых.

Возможное решение

Рассмотрим силы, действующие на стержень:

- сила тяжести mg , приложенная в центре стержня;
- сила нормальной реакции стены N_1 , направленная горизонтально;
- сила упругости пружины $F_{\text{упр}}$, направленная горизонтально к стене (удерживает стержень от скольжения);
- сила нормальной реакции пола N_2 , направленная вертикально вверх.

Поскольку пол и стена гладкие, силы трения отсутствуют.

Будем описывать систему на основе условий равновесия тел:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0.$$

Из второго закона Ньютона в проекции на ось Oy :

$$N_2 - mg = 0 \rightarrow N_2 = mg.$$

Пусть угол между стержнем и полом в положении равновесия равен α . Из уравнения моментов относительно точки A – точки опоры стержня о вертикальную стенку:

$$mg \frac{l}{2} \cos \alpha + F_{\text{упр}} l \sin \alpha - N_2 l \cos \alpha = 0.$$

Подставим полученное для N_2 выражение в уравнение моментов:

$$mg \frac{l}{2} \cos \alpha + F_{\text{упр}} l \sin \alpha = mg l \cos \alpha.$$

Отсюда получаем:

$$F_{\text{упр}} = \frac{mg}{2} \operatorname{ctg} \alpha.$$

С учетом явного выражения для силы упругости

$$F_{\text{упр}} = k \Delta x$$

и выражения для $\operatorname{ctg} \alpha$ из геометрических соображений

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{l_0 + \Delta x}{\sqrt{l^2 - (l_0 + \Delta x)^2}},$$

получаем

$$k \Delta x = \frac{mg}{2} \frac{l_0 + \Delta x}{\sqrt{l^2 - (l_0 + \Delta x)^2}}.$$

Решая полученное уравнение относительно начальной длины пружины l_0 , получаем

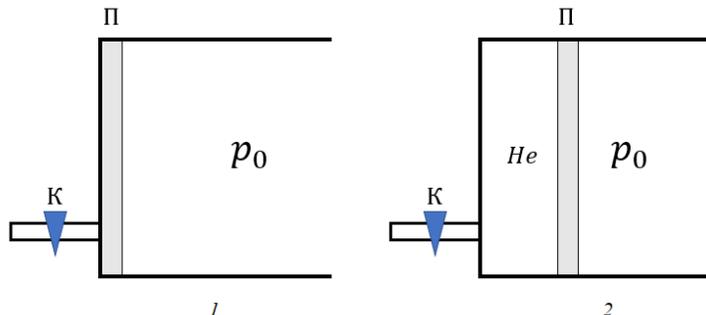
$$l_0 = \left(\frac{l}{\sqrt{\left(\frac{mg}{2k}\right)^2 + \Delta x^2}} - 1 \right) \Delta x$$

Ответ: 33 см.

Задача 2 / 2. Тонкий однородный стержень массы $m = 2,5$ кг и длины $l = 121$ см одним концом опирается на гладкий горизонтальный пол, а вторым опирается на гладкую вертикальную стену. Стержень удерживается в равновесии с помощью горизонтальной пружины, соединяющей нижний конец доски с основанием стены. Жесткость пружины $k = 44 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$, удлинение пружины в состоянии равновесия системы $\Delta x = 5$ см. Ускорение свободного падения $g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Найдите длину пружины l_0 в нерастянутом состоянии. Ответ дайте в сантиметрах с точностью до целых.

Ответ: 16 см.

Задача 3 / 1. Цилиндр с подвижным, плотно прилегающим к стенкам поршнем расположен горизонтально. В начальном положении поршень П прилегает к левому основанию цилиндра (положение 1). В цилиндр через кран К в левом основании медленно закачали гелий. В результате поршень немного передвинулся вправо (положение 2). После этого кран закрыли, цилиндр медленно нагрели, объём гелия увеличился от начального значения V_0 до максимального значения V_{\max} , а затем цилиндр начали охлаждать. Когда от гелия отвели количество теплоты, равное $\frac{1}{5}$ части того, что было передано ему при нагревании, поршень вновь пришел в движение. Найдите отношение силы атмосферного давления к силе трения, действующей на поршень, если отношение максимального объёма гелия V_{\max} к начальному объёму V_0 перед нагреванием равно $\frac{V_{\max}}{V_0} = 5$. Ответ дайте с точностью до десятых.



Возможное решение

При достаточно медленном заполнении цилиндра сила давления гелия на поршень равна сумме атмосферного давления и силы трения покоя:

$$p_0 S = F_{\text{атм}} + F_{\text{тр}},$$

где p_0 — давление гелия непосредственно перед его нагреванием, а S — площадь поршня.

Поскольку величина силы трения скольжения равна максимальному значению силы трения покоя и не зависит от температуры цилиндра, а после закрытия крана количество ν гелия в цилиндре под поршнем не изменяется, то при нагревании давление в цилиндре должно оставаться неизменным — изобарный процесс, а объём гелия должен увеличиваться. Пусть температура гелия непосредственно перед нагреванием равна T_0 , перед охлаждением T_{\max} . После нагревания гелий изохорно охлаждает; при температуре $T_{\text{к}}$ поршень начинает двигаться — при этом сила трения покоя уже направлена в противоположную сторону, а ее модуль достиг максимально возможного значения.

Запишем уравнения Менделеева-Клапейрона для гелия в описанных состояниях:

$$p_0 V_0 = \nu R T_0, \quad p_0 V_{\max} = \nu R T_{\max}, \quad p_{\text{к}} V_{\max} = \nu R T_{\text{к}},$$

где V_0 и V_{\max} — объём гелия до и после нагревания.

Из уравнения состояния находим отношение давлений:

$$\frac{p_{\text{к}}}{p_0} = \frac{T_{\text{к}}}{T_{\max}}.$$

Также из уравнений состояния получим связь между температурами:

$$k = \frac{V_{\max}}{V_0} = \frac{T_{\max}}{T_0}.$$

Известно, что отведённое количество теплоты в n раз меньше полученного при нагревании. Для одноатомного идеального газа:

$$Q_{\text{нагрев}} = \frac{5}{2} \nu R (T_{\max} - T_0), \quad Q_{\text{охлажд}} = \frac{3}{2} \nu R (T_{\max} - T_{\text{к}}).$$

По условию $Q_{\text{нагрев}} = n Q_{\text{охлажд}}$:

$$5(T_{\max} - T_0) = 3n(T_{\max} - T_{\text{к}}).$$

Отсюда, подставляя $T_{\max} = kT_0$, получаем:

$$T_{\text{к}} = kT_0 \left(1 - \frac{5(k-1)}{3nk} \right).$$

Тогда отношение давлений:

$$\frac{p_{\text{к}}}{p_0} = 1 - \frac{5(k-1)}{4 \cdot 3nk}.$$

Когда поршень начинает двигаться при охлаждении гелия, выполняется соотношение:

$$p_{\text{к}}S = F_{\text{атм}} - F_{\text{тр}},$$

так как сила трения теперь направлена противоположно движению.

Следовательно:

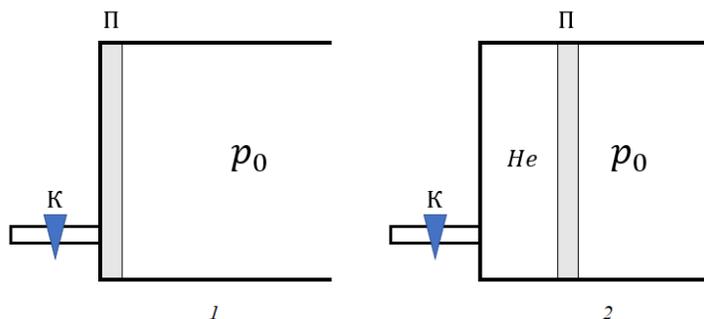
$$p_{\text{к}} = \frac{F_{\text{атм}} - F_{\text{тр}}}{S}, \quad p_0 = \frac{F_{\text{атм}} + F_{\text{тр}}}{S}.$$

Разделим полученные уравнения друг на друга и выразим искомое отношение сил:

$$\frac{F_{\text{атм}}}{F_{\text{тр}}} = \frac{1 + \frac{p_{\text{к}}}{p_0}}{1 - \frac{p_{\text{к}}}{p_0}} = \frac{6nk - 5(k - 1)}{5(k - 1)}.$$

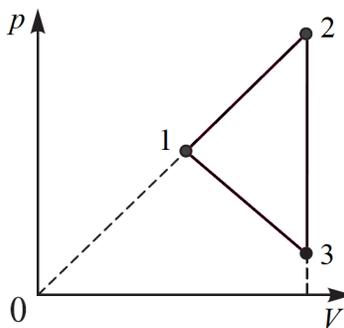
Ответ: 6,5.

Задача 3 / 2. Цилиндр с подвижным, плотно прилегающим к стенкам поршнем расположен горизонтально. В начальном положении поршень П прилегает к левому основанию цилиндра (положение 1). В цилиндр через кран К в левом основании медленно закачали гелий. В результате поршень немного передвинулся вправо (положение 2). После этого кран закрыли, цилиндр медленно нагрели, объём гелия увеличился от начального значения V_0 до максимального значения V_{max} , а затем цилиндр начали охлаждать. Когда от гелия отвели количество теплоты, равное $\frac{1}{4}$ части того, что было передано ему при нагревании, поршень вновь пришел в движение. Найдите отношение силы атмосферного давления к силе трения, действующей на поршень, если отношение максимального объёма гелия V_{max} к начальному объёму V_0 перед нагреванием равно $\frac{V_{\text{max}}}{V_0} = 4$. Ответ дайте с точностью до десятых.



Ответ: 5,4.

Задача 4 / 1. Найдите работу A , совершаемую $\nu = 2$ моль одноатомного идеального газа в цикле (1–2–3–1), состоящем из трех линейных участков на pV -диаграмме. Точки 1 и 2 лежат на прямой, проходящей через начало координат. На участке 2–3 объем газа не изменялся. Температура газа в точке 2 равна $T_2 = 576$ К, а температуры в точках 1 и 3 равны $T_1 = T_3 = 324$ К. Универсальная газовая постоянная $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$. Ответ дайте в джоулях с точностью до целого.



Возможное решение

По условию, точки 1 и 2 лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, поэтому выполняется соотношение:

$$p = \alpha V.$$

Используем уравнение Менделеева–Клапейрона:

$$pV = \nu RT \Rightarrow \alpha V^2 = \nu RT.$$

Следовательно:

$$\frac{V^2}{T} = \text{const}, \quad \Rightarrow \quad \frac{V_2^2}{T_2} = \frac{V_1^2}{T_1}.$$

Отсюда:

$$V_2 = V_1 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}, \quad p_2 = p_1 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}.$$

На участке 2–3 объём постоянен:

$$V_2 = V_3.$$

Из уравнения состояния:

$$\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_3}{T_3} \Rightarrow p_3 = p_2 \frac{T_3}{T_2} = p_1 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \cdot \frac{T_3}{T_2}.$$

Так как $T_3 = T_1$, получаем:

$$p_3 = p_1 \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}.$$

Работу газа за цикл вычислим, как площадь, ограниченную диаграммой процесса:

$$A_{12} = \frac{p_2 - p_3}{2} (V_2 - V_1).$$

Подставим найденные выражения для p_2 , p_3 , V_2 :

$$A = \frac{p_2 - p_3}{2} (V_2 - V_1) = \frac{p_1}{2} \left(\sqrt{\frac{T_2}{T_1}} - \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \right) (V_1 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} - V_1).$$

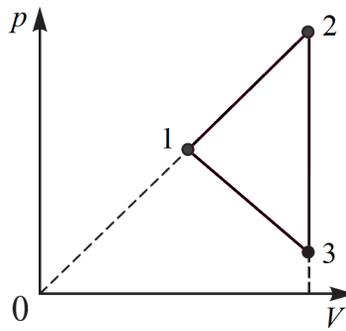
Используя $p_1 V_1 = \nu R T_1$, получаем:

$$A = \frac{\nu R T_1}{2} \cdot \frac{T_2 - T_1}{\sqrt{T_1 T_2}} \left(\sqrt{\frac{T_2}{T_1}} - 1 \right) = \frac{\nu R (T_2 - T_1)}{2} \cdot \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{T_2}{T_1}} - 1 \right) = \frac{\nu R (T_2 - T_1)}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \right).$$

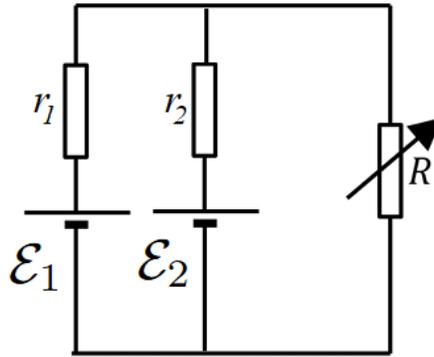
Ответ: 524 Дж.

Задача 4 / 2. Найдите работу A , совершаемую $\nu = 3$ моль одноатомного идеального газа в цикле (1–2–3–1), состоящем из трех линейных участков на pV -диаграмме. Точки 1 и 2 лежат на прямой, проходящей через начало координат. На участке 2–3 объем газа не изменялся. Температура газа в точке 2 равна $T_2 = 529$ К, а температуры в точках 1 и 3 равны $T_1 = T_3 = 361$ К. Универсальная газовая постоянная $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$. Ответ дайте в джоулях с точностью до целого.

Ответ: 364 Дж.



Задача 5 / 1. Два источника с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 12$ В и $\mathcal{E}_2 = 15$ В и внутренними сопротивлениями $r_1 = 15$ Ом и $r_2 = 10$ Ом соответственно включены параллельно друг другу, как показано на рисунке. К общим контактам такого составного источника ЭДС подключают переменный резистор, сопротивление которого меняется в пределах $R \in [3; 20]$ Ом. Какова максимальная тепловая мощность P_{\max} , выделяющаяся на переменном резисторе, если очень медленно изменять его сопротивление от минимального до максимального? Ответ дайте в ваттах с точностью до целого числа.



Возможное решение

По первому и второму законам Кирхгофа для данной схемы имеем:

$$I_1 + I_2 - I = 0,$$

$$I_1 r_1 + IR = \mathcal{E}_1,$$

$$I_2 r_2 + IR = \mathcal{E}_2.$$

Из этой системы уравнений выражаем ток, проходящий через нагрузку (резистор R):

$$I = \frac{r_1 \mathcal{E}_2 + r_2 \mathcal{E}_1}{r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)}.$$

Мощность на сопротивлении R :

$$P = I^2 R = \left(\frac{r_1 \mathcal{E}_2 + r_2 \mathcal{E}_1}{r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)} \right)^2 R = \left(\frac{\frac{r_1 \mathcal{E}_2 + r_2 \mathcal{E}_1}{r_1 + r_2}}{\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} + R} \right)^2 R.$$

Воспользуемся аналогией с задачей для одиночного источника. Известно, что максимум мощности соответствует равенству внешнего сопротивления эффективному внутреннему сопротивлению системы:

$$R^* = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

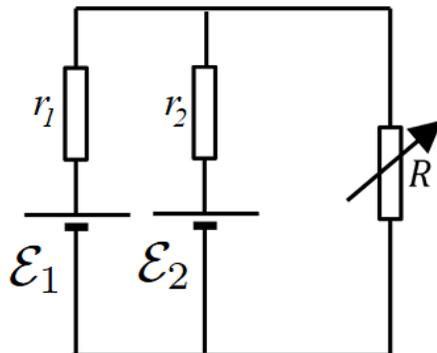
Так как значение R^* попадает в диапазон $[R_{\min}; R_{\max}]$, максимальная мощность действительно достигается в этом интервале.

Подставим найденное условие в формулу мощности:

$$P_{\max} = \frac{(r_1 \mathcal{E}_2 + r_2 \mathcal{E}_1)^2}{4r_1 r_2 (r_1 + r_2)}.$$

Ответ: 8 Вт.

Задача 5 / 2. Два источника с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 10$ В и $\mathcal{E}_2 = 15$ В и внутренними сопротивлениями $r_1 = 10$ Ом и $r_2 = 15$ Ом соответственно включены параллельно друг другу, как показано на рисунке. К общим контактам такого составного источника ЭДС подключают переменный резистор, сопротивление которого меняется в пределах $R \in [1; 10]$ Ом. Какова максимальная тепловая мощность P_{\max} , выделяющаяся на переменном резисторе, если очень медленно изменять его сопротивление от минимального до максимального? Ответ дайте в ваттах с точностью до целого числа.



Ответ: 6 Вт.