

Олимпиада школьников «Курчатов»
по математике – 2026. Отборочный этап.
8-9 класс.

Задача 1.1 У Вани есть пять механических будильников, каждый из которых звенит, соответственно, 1, 2, 4, 5 и 7 минут, после чего замолкает на одну минуту, и затем начинает звенеть снова. И так до тех пор, пока его не отключат. Ваня завёл будильники на 8 : 00 утра, но, по счастливому стечению обстоятельств, проснулся сам и ушёл на тренировку. В 8 : 00 все пять будильников начали звонить. Ваня вернулся в первый момент, когда ни один будильник не звенел после 8 : 00. Через сколько минут после начала звона будильников он вернулся?

Решение. Заметим, что первый будильник звонит с периодом $t_1 = 2$ минуты, второй – с $t_2 = 3$ минуты, аналогично $t_3 = 5$, $t_4 = 6$ и $t_5 = 8$. Отмерим эти периоды от 7 : 59 – момента, когда ни один из будильников не звонил. Заметим, что $\text{НОК}(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = 120$ минут, значит впервые все будильники замолчат в 9 : 59, то есть через 119 минут.

Ответ: 119. ■

Задача 1.2 У Вани есть пять механических будильников, каждый из которых звенит, соответственно, 1, 2, 3, 4 и 8 минут, после чего замолкает на одну минуту, и затем начинает звенеть снова. И так до тех пор, пока его не отключат. Ваня завёл будильники на 8 : 00 утра, но, по счастливому стечению обстоятельств, проснулся сам и ушёл на тренировку. В 8 : 00 все пять будильников начали звонить. Ваня вернулся в первый момент, когда ни один будильник не звенел после 8 : 00. Через сколько минут после начала звона будильников он вернулся?

Ответ: 179.

Задача 1.3 У Вани есть пять механических будильников, каждый из которых звенит, соответственно, 2, 3, 4, 5 и 8 минут, после чего замолкает на одну минуту, и затем начинает звенеть снова. И так до тех пор, пока его не отключат. Ваня завёл будильники на 8 : 00 утра, но, по счастливому стечению обстоятельств, проснулся сам и ушёл на тренировку. В 8 : 00 все пять будильников начали звонить. Ваня вернулся в первый момент, когда ни один будильник не звенел после 8 : 00. Через сколько минут после начала звона будильников он вернулся?

Ответ: 179.

Задача 1.4 У Вани есть пять механических будильников, каждый из которых звенит, соответственно, 1, 2, 3, 6 и 8 минут, после чего замолкает на одну минуту, и затем начинает звенеть снова. И так до тех пор, пока его не отключат. Ваня завёл будильники на 8 : 00 утра, но, по счастливому

стечению обстоятельств, проснулся сам и ушёл на тренировку. В 8 : 00 все пять будильников начали звонить. Ваня вернулся в первый момент, когда ни один будильник не звенел после 8 : 00. Через сколько минут после начала звона будильников он вернулся?

Ответ: 251.

Задача 2.1 Король острова Рыцарей и Лжецов, сам являющийся рыцарем, решил узнать, сколько рыцарей среди его 12-и министров. Собрав их, он задал министрам единственный вопрос «Сколько среди вас рыцарей?»:

Один сказал: «Здесь не меньше 9 рыцарей».

Второй сказал: «Здесь не больше 6 рыцарей».

Остальные 10 хором воскликнули: «Здесь ровно 7 рыцарей».

Через минуту раздумий король правильно назвал число рыцарей среди его министров. Какое число он назвал? Министры знают, кто есть кто.

Решение. Проведем анализ утверждений: Допустим, что утверждение «Здесь ровно 7 рыцарей» истинно, тогда, каждый из 10 министров сказал правду, следовательно все они рыцари – противоречие. Допустим, что утверждение «Здесь не меньше 9 рыцарей» истинно, тогда, первый житель – рыцарь, а остальные – лжецы, снова противоречие. Допустим, что утверждение «Здесь не больше 6 рыцарей» истинно, тогда второй житель – рыцарь, а остальные – лжецы. Допустим, что каждое из утверждений ложно, тогда в тронном зале нет рыцарей (кроме короля), тогда второе утверждение истинно – противоречие. Таким образом, можно сделать вывод, что в тронном зале всего 1 рыцарь, кроме самого короля.

Ответ: 1. ■

Задача 2.2 Король острова Рыцарей и Лжецов, сам являющийся рыцарем, решил узнать, сколько рыцарей среди его 15-и министров. Собрав их, он задал министрам единственный вопрос «Сколько среди вас рыцарей?»:

Один сказал: «Здесь не меньше 12 рыцарей».

Второй сказал: «Здесь не больше 10 рыцарей».

Остальные 13 хором воскликнули: «Здесь ровно 11 рыцарей».

Через минуту раздумий король правильно назвал число рыцарей среди его министров. Какое число он назвал? Министры знают, кто есть кто.

Ответ: 1.

Задача 2.3 Король острова Рыцарей и Лжецов, сам являющийся рыцарем, решил узнать, сколько рыцарей среди его 18-и министров. Собрав их, он задал министрам единственный вопрос «Сколько среди вас рыцарей?»:

Один сказал: «Здесь не меньше 14 рыцарей».

Второй сказал: «Здесь не больше 12 рыцарей».

Остальные 16 хором воскликнули: «Здесь ровно 13 рыцарей».

Через минуту раздумий король правильно назвал число рыцарей среди его министров. Какое число он назвал? Министры знают, кто есть кто.

Ответ: 1.

Задача 2.4 Король острова Рыцарей и Лжецов, сам являющийся рыцарем, решил узнать, сколько рыцарей среди его 10-и министров. Собрав их, он задал министрам единственный вопрос «Сколько среди вас рыцарей?»:

Один сказал: «Здесь не меньше 7 рыцарей».

Второй сказал: «Здесь не больше 5 рыцарей».

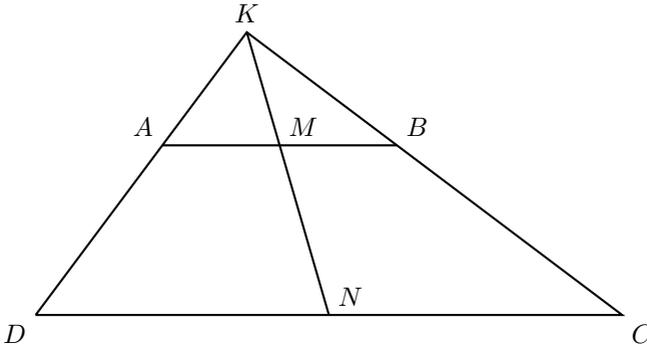
Остальные 8 хором воскликнули: «Здесь ровно 6 рыцарей».

Через минуту раздумий король правильно назвал число рыцарей среди его министров. Какое число он назвал? Министры знают, кто есть кто.

Ответ: 1.

Задача 3.1 В трапеции $ABCD$ с основаниями $CD = 46$ и $AB = 18$ и острыми углами при большем основании отметили середину M стороны AB и такую точку N на стороне CD , что $\angle ADN = \frac{1}{2}\angle MNC$ и $\angle BCN = \frac{1}{2}\angle MND$. Найдите длину отрезка MN .

Решение. Заметим, что из условий $\angle ADN = \frac{1}{2}\angle MNC$ и $\angle BCN = \frac{1}{2}\angle MND$ следует, что $\angle ADC + \angle BCD = 90^\circ$. Продлим боковые стороны AD и BC до пересечения в точке K . Тогда $\angle DKC = 90^\circ$.



Теперь очевидно, что KM – медиана прямоугольного треугольника ABK , а значит $\angle AMK = 180^\circ - 2\angle KAM = 180^\circ - 2\angle ADN = 180^\circ - \angle MNC = \angle MND$, то есть $KM \parallel MN$, но это значит, что точки K, M и N лежат на одной прямой, то есть N – середина DC . Получили, что $MN = KN - KM = \frac{1}{2}(46 - 18) = 14$.

Ответ: 14. ■

Задача 3.2 В трапеции $ABCD$ с основаниями $CD = 38$ и $AB = 6$ и острыми углами при большем основании отметили середину M стороны AB и такую точку N на стороне CD , что $\angle ADN = \frac{1}{2}\angle MNC$ и $\angle BCN = \frac{1}{2}\angle MND$. Найдите длину отрезка MN .

Ответ: 16.

Задача 3.3 В трапеции $ABCD$ с основаниями $CD = 58$ и $AB = 24$ и острыми углами при большем основании отметили середину M стороны AB и такую точку N на стороне CD , что $\angle ADN = \frac{1}{2}\angle MNC$ и $\angle BCN = \frac{1}{2}\angle MND$. Найдите длину отрезка MN .

Ответ: 17.

Задача 3.4 В трапеции $ABCD$ с основаниями $CD = 40$ и $AB = 22$ и острыми углами при большем основании отметили середину M стороны AB и такую точку N на стороне CD , что $\angle ADN = \frac{1}{2}\angle MNC$ и $\angle BCN = \frac{1}{2}\angle MND$. Найдите длину отрезка MN .

Ответ: 9.

Задача 4.1 В компании 15 человек. На 8 марта мальчики дарили девочкам цветы: не более одного цветка от одного мальчика одной девочке. Известно, что никакие три девочки не получили одинаковое число цветов. Какое наименьшее количество мальчиков может быть в компании?

Решение. Пусть в компании n парней, тогда девушек $15 - n$. Каждая девушка может получить от 0 до n цветков. По условию никакие 3 девушки не получили одинаковое количество цветков, значит, количество цветков в «букете» может повторяться не более двух раз, тогда:

$$15 - n \leq 2(n + 1) \iff n \geq \frac{13}{3}.$$

Так как $n \in \mathbb{N} : n \geq 5$. Таким образом, количество парней в компании должно быть не меньше 5, а количество девушек не больше 10. Покажем, что такое распределение возможно. Построим таблицу: каждая строка – парень, столбец – девушка, в пересечении – 1, если парень дарит девушке цветок, и 0 – если не дарит.

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9	D_{10}
P_1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
P_2	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0
P_3	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0
P_4	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0
P_5	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0
Σ	5	5	4	4	3	3	2	2	1	0

Следовательно, наименьшее возможное количество парней равно 5.

Ответ: 5. ■

Задача 4.2 В компании 10 человек. На 8 марта мальчики дарили девочкам цветы: не более одного цветка от одного мальчика одной девочке. Известно, что никакие три девочки не получили одинаковое число цветов. Какое наименьшее количество мальчиков может быть в компании?

Ответ: 3.

Задача 4.3 В компании 13 человек. На 8 марта мальчики дарили девочкам цветы: не более одного цветка от одного мальчика одной девочке. Известно, что никакие три девочки не получили одинаковое число цветов. Какое наименьшее количество мальчиков может быть в компании?

Ответ: 4.

Задача 4.4 В компании 19 человек. На 8 марта мальчики дарили девочкам цветы: не более одного цветка от одного мальчика одной девочке.

Известно, что никакие три девочки не получили одинаковое число цветов.
Какое наименьшее количество мальчиков может быть в компании?

Ответ: 6.

Задача 5.1 Про число X известно, что оно делится на 48 и имеет ровно 2026 делителей. Найдите остаток при делении на 9 максимального из всех X , удовлетворяющих условиям.

Решение. Заметим, что $2026 = 2 \cdot 1013$ и 1013 – простое. Тогда $X = \alpha_1 \cdot \alpha_2^{1012}$ – разложение числа X на простые множители. Теперь заметим, что $48 = 3 \cdot 2^4$. Тогда заметим, что X определяется однозначно – это $3 \cdot 2^{1012}$. Остаётся заметить, что $2^3 \equiv_9 -1$, то есть

$$3 \cdot 2^{1012} = 6 \cdot 2^{1011} = 6 \cdot (2^3)^{337} \equiv_9 6 \cdot (-1) \equiv_9 3.$$

Ответ: 3. ■

Задача 5.2 Про число X известно, что оно делится на 80 и имеет ровно 2026 делителей. Найдите остаток при делении на 9 максимального из всех X , удовлетворяющих условиям.

Ответ: 8.

Задача 5.3 Про число X известно, что оно делится на 56 и имеет ровно 2026 делителей. Найдите остаток при делении на 9 максимального из всех X , удовлетворяющих условиям.

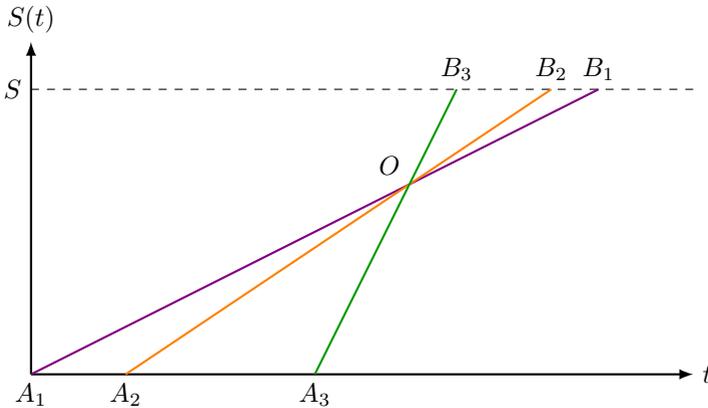
Ответ: 4.

Задача 5.4 Про число X известно, что оно делится на 44 и имеет ровно 2026 делителей. Найдите остаток при делении на 9 максимального из всех X , удовлетворяющих условиям.

Ответ: 5.

Задача 6.1 Дядя Фёдор, пёс Шарик и почтальон Печкин устроили забег на скорость. Когда Шарик побежал, кот Матроскин отвлек остальных участников забега, из-за чего Дядя Фёдор начал забег на минуту позже, а возмущённый несправедливостью почтальон Печкин сбежал за велосипедом и принял участие в гонке на велосипеде, стартовав через две минуты после начала движения Дяди Фёдора. В некоторый момент гонки Матроскин заметил, что все три героя преодолели одинаковую часть дистанции. Через какое время после финиша Печкина финишировал Шарик, если известно, что он прибежал через 30 секунд после Дяди Фёдора? Ответ дайте в секундах.

Решение. Построим графики движения каждого из трёх персонажей в координатах $t, S(t)$:



Пусть график движения Шарика графически представляется отрезком A_1B_1 , Дяди Фёдора – A_2B_2 и, наконец, Печкина – A_3B_3 . Пусть точка, в которой пересекаются все три прямые – точка O . Тогда из $\triangle A_1A_3O \sim \triangle B_1B_3O$ и $\triangle A_2A_3O \sim \triangle B_2B_3O$ имеем:

$$\frac{A_2A_1}{B_2B_1} = \frac{A_3O}{B_3O} = \frac{A_1A_3}{B_1B_3} \iff \frac{2}{0.5} = \frac{3}{B_3B_1} \iff B_3B_1 = 1.5 \text{ минуты} = 90 \text{ секунд.}$$

Ответ: 90. ■

Задача 6.2 Дядя Фёдор, пёс Шарик и почтальон Печкин устроили забег на скорость. Когда Шарик побежал, кот Матроскин отвлек остальных участников забега, из-за чего Дядя Фёдор начал забег на полторы минуты позже, а возмущённый несправедливостью почтальон Печкин сбежал за велосипедом и принял участие в гонке на велосипеде, стартовав через

минуту после начала движения Дяди Фёдора. В некоторый момент гонки Матроскин заметил, что все три героя преодолели одинаковую часть дистанции. Через какое время после финиша Печкина финишировал Шарик, если известно, что он прибежал через 30 секунд после Дяди Фёдора? Ответ дайте в секундах.

Ответ: 50.

Задача 6.3 Дядя Фёдор, пёс Шарик и почтальон Печкин устроили забег на скорость. Когда Шарик побежал, кот Матроскин отвлек остальных участников забега, из-за чего Дядя Фёдор начал забег на 30 секунд позже, а возмущённый несправедливостью почтальон Печкин сбегал за велосипедом и принял участие в гонке на велосипеде, стартовав через две минуты после начала движения Дяди Фёдора. В некоторый момент гонки Матроскин заметил, что все три героя преодолели одинаковую часть дистанции. Через какое время после финиша Печкина финишировал Шарик, если известно, что он прибежал через 20 секунд после Дяди Фёдора? Ответ дайте в секундах.

Ответ: 100.

Задача 6.4 Дядя Фёдор, пёс Шарик и почтальон Печкин устроили забег на скорость. Когда Шарик побежал, кот Матроскин отвлек остальных участников забега, из-за чего Дядя Фёдор начал забег на минуту позже, а возмущённый несправедливостью почтальон Печкин сбегал за велосипедом и принял участие в гонке на велосипеде, стартовав через полторы минуты после начала движения Дяди Фёдора. В некоторый момент гонки Матроскин заметил, что все три героя преодолели одинаковую часть дистанции. Через какое время после финиша Печкина финишировал Шарик, если известно, что он прибежал через 40 секунд после Дяди Фёдора? Ответ дайте в секундах.

Ответ: 100.