

Отборочный этап. 6-7 класс.

Задача 1.1. Дима загадал двузначное число и сделал шесть утверждений о нём, но каждое третье по счёту утверждение является ложным, остальные — правдивые. Неизвестно, с какого утверждения начинается ложь: первое может быть как правдой, так и ложью. Утверждения Димы следующие:

1. "Моё число больше 57"
2. "В моём числе есть цифра 6"
3. "Моё число меньше 42"
4. "В моём числе цифры разной чётности"
5. "Моё число четное"
6. "Одна из цифр моего числа равна 9"

Какое число мог загадать Дима? Если возможно несколько вариантов чисел, которые мог загадать Дима, в ответ запишите их сумму.

Решение: Заметим, что утверждения 1 и 3 не могут быть верными одновременно. Так как известно, что ложным является только каждое третье, то утверждения 1 и 3 также не могут быть ложными одновременно. Рассмотрим два случая:

Случай 1: Утверждение 1 — ложно, утверждение 3 — правдиво. Тогда получаем, что утверждения 2, 5 и 6 — правдивы, утверждение 4 — ложно, так как до и после ложного утверждения Дима говорит по два верных утверждения. Тогда про загаданное число известно, что в нем есть цифра 6, а также цифры этого числа одной четности, то есть обе цифры четные. Но также верно утверждение, что в числе есть цифра 9. Противоречие.

Случай 2: Утверждение 1 — правдиво, утверждение 3 — ложно. Тогда получаем, что утверждения 2, 4 и 5 — правдивы, утверждение 6 — ложно. Тогда про загаданное Димой число известно, что оно четное, в нем есть цифра 6, а также его цифры разной четности. То есть первая цифра этого числа нечетная и не 9. Число, подходящее под эти условия и большее 57, это 76.

Ответ: 76

Задача 1.2. Дима загадал двузначное число и сделал шесть утверждений о нём, но каждое третье по счёту утверждение является ложным, остальные — правдивые. Неизвестно, с какого утверждения начинается ложь: первое может быть как правдой, так и ложью. Утверждения Димы следующие:

1. "Моё число больше 57"

2. "В моём числе есть цифра 6"
3. "Моё число меньше 42"
4. "В моём числе цифры одной чётности"
5. "Моё число четное"
6. "Одна из цифр моего числа равна 9"

Какое число мог загадать Дима? Если возможно несколько вариантов чисел, которые мог загадать Дима, в ответ запишите их сумму.

Ответ: 406

Задача 1.3. Дима загадал двузначное число и сделал шесть утверждений о нём, но каждое третье по счёту утверждение является ложным, остальные — правдивые. Неизвестно, с какого утверждения начинается ложь: первое может быть как правдой, так и ложью. Утверждения Димы следующие:

1. "Моё число больше 57"
2. "В моём числе есть цифра 6"
3. "Моё число меньше 42"
4. "В моём числе цифры разной чётности"
5. "Одна из цифр моего числа равна 2"
6. "Моё число четное"

Какое число мог загадать Дима? Если возможно несколько вариантов чисел, которые мог загадать Дима, в ответ запишите их сумму.

Ответ: 26

Задача 1.4. Дима загадал двузначное число и сделал шесть утверждений о нём, но каждое третье по счёту утверждение является ложным, остальные — правдивые. Неизвестно, с какого утверждения начинается ложь: первое может быть как правдой, так и ложью. Утверждения Димы следующие:

1. "Моё число больше 57"
2. "В моём числе есть цифра 5"
3. "Моё число меньше 42"
4. "Моё число четное"
5. "В моём числе цифры разной чётности"
6. "Одна из цифр моего числа равна 2"

Какое число мог загадать Дима? Если возможно несколько вариантов чисел, которые мог загадать Дима, в ответ запишите их сумму.

Ответ: 83

Задача 2.1. Красная Шапочка отправилась к бабушке на велосипеде из дома. Путь до бабушки состоит из равных (горизонтальных) участков, а также подъемов и спусков. На равных участках Красная Шапочка едет со скоростью 12 км/ч, на подъемах – 8 км/ч, а на спусках – 15 км/ч. До бабушки она доехала за 5 часов, а обратно домой за 4 часа 39 минут. Ровные участки составляют 28 км. Сколько километров проехала Красная Шапочка суммарно на подъемах и спусках по пути к бабушке и обратно?

Решение: Заметим, что раз Красная Шапочка съедает пирожок в конце каждого километра на подъемах и спусках, то число съеденных ею пирожков равно количеству пройденных километров на подъемах и спусках. Рассмотрим путь Красной Шапочки от дома до бабушки. Пусть на подъем она двигалась x км, а на спуск – y км. Тогда время в пути до бабушки составило $\frac{28}{12} + \frac{x}{8} + \frac{y}{15}$, что равно 5 часам. По пути обратно от бабушки спуски стали подъемами и наоборот. Тогда время в пути обратно домой составило $\frac{28}{12} + \frac{x}{15} + \frac{y}{8}$, что равно $\frac{279}{60} = \frac{93}{20}$ часа. Выражая $x + y$ из двух полученных равенств, получаем $x + y = 26$. Тогда общая длина подъемов и спусков по пути к бабушке и обратно составила 52 км, а значит, Красная Шапочка съела 52 пирожка.

Ответ: 52

Задача 2.2. Красная Шапочка отправилась к бабушке на велосипеде из дома. Путь до бабушки состоит из равных (горизонтальных) участков, а также подъемов и спусков. На равных участках Красная Шапочка едет со скоростью 8 км/ч, на подъемах – 5 км/ч, а на спусках – 12 км/ч. До бабушки она доехала за 4 часа, а обратно домой за 3 часа 5 минут. Ровные участки составляют 17 км. Сколько километров проехала Красная Шапочка суммарно на подъемах и спусках по пути к бабушке и обратно?

Ответ: 20

Задача 2.3. Красная Шапочка отправилась к бабушке на велосипеде из дома. Путь до бабушки состоит из равных (горизонтальных) участков, а также подъемов и спусков. На равных участках Красная Шапочка едет со скоростью 8 км/ч, на подъемах – 5 км/ч, а на спусках – 12 км/ч. До бабушки она доехала за 4 часа, а обратно домой за 3 часа 39 минут. Ровные участки составляют 17 км. Сколько километров проехала Красная Шапочка суммарно на подъемах и спусках по пути к бабушке и обратно?

Ответ: 24

Задача 2.4. Красная Шапочка отправилась к бабушке на велосипеде из дома. Путь до бабушки состоит из равных (горизонтальных) участков, а также подъ-

емов и спусков. На ровных участках Красная Шапочка едет со скоростью 12 км/ч, на подъемах – 8 км/ч, а на спусках – 15 км/ч. До бабушки она доехала за 5 часов, а обратно домой за 4 часа 16 минут. Ровные участки составляют 28 км. Сколько километров проехала Красная Шапочка суммарно на подъемах и спусках по пути к бабушке и обратно?

Ответ: 48

Задача 3.1. Петя нарисовал прямоугольник со сторонами n и m , где n и m – целые числа. Затем решил увеличить его стороны в 5 и 4 раза соответственно. Оказалось, что значение площади исходного прямоугольника больше значения периметра нового прямоугольника на 9. Найдите наибольшее возможное значение n .

Решение: Составим уравнение: $10n + 8m = mn - 9$

$$n = \frac{8m + 9}{m - 10} = \frac{8(m - 10) + 89}{m - 10} = 8 + \frac{89}{m - 10}$$

Ответ: 97

Задача 3.2. Петя нарисовал прямоугольник со сторонами n и m , где n и m – целые числа. Затем решил увеличить его стороны в 5 и 4 раза соответственно. Оказалось, что значение площади исходного прямоугольника больше значения периметра нового прямоугольника на 9. Найдите наименьшее возможное значение n .

Ответ: 9

Задача 3.3. Петя нарисовал прямоугольник со сторонами n и m , где n и m – целые числа. Затем решил увеличить его стороны в 3 и 7 раз соответственно. Оказалось, что значение площади исходного прямоугольника больше значения периметра нового прямоугольника на 5. Найдите наименьшее возможное значение n .

Ответ: 15

Задача 3.4. Петя нарисовал прямоугольник со сторонами n и m , где n и m – целые числа. Затем решил увеличить его стороны в 3 и 7 раз соответственно. Оказалось, что значение площади исходного прямоугольника больше значения периметра нового прямоугольника на 5. Найдите наибольшее возможное значение n .

Ответ: 103

Задача 4.1. Следователь обнаружил в блокноте разыскиваемого математика записанную последовательность чисел: 107, 108, 109, ... , 2026. Рядом была пометка: «Удалив сначала всех тех, кто дружен с 2, а затем тех, кто дружен с 5, найдёшь ответ в конце пути оставшихся». Следователь понял, что нужно вычеркнуть все четные числа и числа, оканчивающиеся на 5, а затем найти последнюю цифру произведения оставшихся. Найдите эту цифру.

Решение: На 2 делятся все чётные числа, на 5 делятся те, что заканчиваются

на 0 или 5. В итоге остались числа, которые заканчиваются на 1, 3, 7, 9. В диапазоне от 107 до 2026 помещается 191 полный десяток. То есть, перемножение последних цифр всех оставшихся на доске чисел можно записать так:

$$7 * 9 * (1 * 3 * 7 * 9)^{191} * 1 * 3$$

Нечетная степень скобки оканчивается на 9, четная степень оканчивается на 1.
Ответ: 1

Задача 4.2. Следователь обнаружил в блокноте разыскиваемого математика записанную последовательность чисел: 113, 114, 115, ... , 2026. Рядом была пометка: «Удалив сначала всех тех, кто дружен с 2, а затем тех, кто дружен с 5, найдёшь ответ в конце пути оставшихся». Следователь понял, что нужно вычеркнуть все четные числа и числа, оканчивающиеся на 5, а затем найти последнюю цифру произведения оставшихся. Найдите эту цифру.

Ответ: 7

Задача 4.3. Следователь обнаружил в блокноте разыскиваемого математика записанную последовательность чисел: 125, 126, 127, ... , 2026. Рядом была пометка: «Удалив сначала всех тех, кто дружен с 2, а затем тех, кто дружен с 5, найдёшь ответ в конце пути оставшихся». Следователь понял, что нужно вычеркнуть все четные числа и числа, оканчивающиеся на 5, а затем найти последнюю цифру произведения оставшихся. Найдите эту цифру.

Ответ: 1

Задача 4.4. Следователь обнаружил в блокноте разыскиваемого математика записанную последовательность чисел: 138, 139, 140, ... , 2026. Рядом была пометка: «Удалив сначала всех тех, кто дружен с 2, а затем тех, кто дружен с 5, найдёшь ответ в конце пути оставшихся». Следователь понял, что нужно вычеркнуть все четные числа и числа, оканчивающиеся на 5, а затем найти последнюю цифру произведения оставшихся. Найдите эту цифру.

Ответ: 7

Задача 5. Вале нужно отгадать три числа, которые загадал Дима. Дима дал Вале подсказку, что его числа имеют вид \overline{abc} , \overline{cba} и \overline{xxx} (разными буквами обозначены разные цифры), а также для них выполняется равенство $\overline{abc} + \overline{cba} = \overline{xxx}$. Валя делает предположение, называя тройку чисел, удовлетворяющую подсказке. За какое минимальное количество предположений Валя гарантированно угадает загаданную Димой тройку?

Решение: $a + c < 10$, поэтому нет переносов и $b + b$, то есть x , — чётная цифра. Ни a , ни b , ни c не равны нулю, так как иначе $x = 0$. \overline{xxx} не может быть 222, так как a, b, c — различные цифры. Тогда x может быть либо 4, либо 6, либо 8. Перепишем все возможные варианты: $444=123+321$, $666=135+531$ или $666=234+432$, $888=147+741$, или $888=246+642$, или $888=345+543$. Итого, всего возможно 6 троек чисел, удовлетворяющих подсказке Димы. Значит, за 6 предположений Валя гарантированно сможет угадать загаданную Димой.

Ответ: 6