Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2026. Отборочный этап. 10-11 класс.

Задача 1.1 Найдите такие значения параметра a, при которых уравнение $x^2 - ax - 1 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2, причём выполняется равенство $x_1 - \frac{58}{x_1^2} = x_2 - \frac{58}{x_2^2}$. Если таких a несколько, в качестве ответа введите их произведение, если таких a не существует, введите 12345.

Решение. Так как дискриминант квадратного трёхчлена $a^2 + 4$ положителен при любых a, данное уравнение всегда имеет два различных действительных решения. Преобразуем равенство, данное в условии:

$$x_1 - x_2 + 58\left(\frac{1}{x_2^2} - \frac{1}{x_1^2}\right) = 0 \Longleftrightarrow (x_1 - x_2) + 58 \cdot \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1x_2)^2} = 0.$$

Так как корни по условию различны имеем $x_1 - x_2 \neq 0$, разделим уравнение на $(x_1 - x_2)$:

$$1 + \frac{58(x_1 + x_2)}{(x_1x_2)^2} = 0.$$

По теореме Виета: $x_1 + x_2 = a$, $x_1x_2 = -1$. Тогда $a = -\frac{1}{58}$.

Ответ: $-\frac{1}{58}$. ■

Задача 1.2 Найдите такие значения параметра a, при которых уравнение $x^2 - ax - 2 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2, причём выполняется равенство $x_1 - \frac{17}{x_1^2} = x_2 - \frac{17}{x_2^2}$. Если таких a несколько, в качестве ответа введите их произведение, если таких a не существует, введите 12345.

Ответ: $-\frac{4}{17}$.

Задача 1.3 Найдите такие значения параметра a, при которых уравнение $x^2 - ax - 3 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2, причём выполняется равенство $x_1 - \frac{21}{x_1^2} = x_2 - \frac{21}{x_2^2}$. Если таких a несколько, в качестве ответа введите их произведение, если таких a не существует, введите 12345.

Ответ: $-\frac{3}{7}$.

Задача 1.4 Найдите такие значения параметра a, при которых уравнение $x^2 - ax - 4 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2, причём выполняется равенство $x_1 - \frac{44}{x_1^2} = x_2 - \frac{44}{x_2^2}$. Если таких a несколько, в качестве ответа введите их произведение, если таких a не существует, введите 12345.

Ответ: $-\frac{4}{11}$.

Задача 2.1 Сумма восьми последовательных натуральных нечётных чисел, меньшее из которых больше единицы, равна N^2. Укажите минимальное возможное значение числа N.

Решение. Пусть наименьшее из чисел $2z+1$. Тогда наибольшее – $2z+1+7\cdot 2 = 15+2z$. Сумма арифметической прогрессии с разностью 2 равна $\dfrac{(2z+1)+(2z+15)}{2}\cdot 8 = N^2$, откуда $N^2 = 16z+64$. Правая часть равенства кратна 16, тогда и левая кратна 16, откуда $N = 4t$ и $t^2 = z+4$. Так как $z > 0$ имеем минимальный возможный квадрат $t^2 = 9$ и значит $N = 12$. Покажем, как решить эту задачу из других соображений. Хорошо известно, что сумма первых k нечётных чисел равна k^2. Тогда наша сумма $N^2 = A^2-(A-8)^2$, где A – номер наибольшего из рассматриваемых нечётных чисел и $A \geqslant 8$. Получили $N^2 = 16A-64$, то есть, аналогично решению выше, $N = 4m$ и уравнение упрощается до $m^2 = A-4$. Минимальный квадрат больший $A-4 \geqslant 8-4 = 4$ есть 9, тогда снова $N = 12$.

Ответ: 12. *Заметим, что задача сводилась к поиску минимальной пифагоровой тройки, два числа в которой отличаются на 8, минимальной из таких является тройка* (5,12,13). ■

Задача 2.2 Сумма восемнадцати последовательных натуральных нечётных чисел, меньшее из которых больше единицы, равна N^2. Укажите минимальное возможное значение числа N.

Ответ: 24.

Задача 2.3 Сумма девяти последовательных натуральных нечётных чисел, меньшее из которых больше единицы, равна N^2. Укажите минимальное возможное значение числа N.

Ответ: 15.

Задача 2.4 Сумма двадцати пяти последовательных натуральных нечётных чисел, меньшее из которых больше единицы, равна N^2. Укажите минимальное возможное значение числа N.

Ответ: 35.

Задача 3.1 В конкурсе приняли участие m учеников из Эмска и n — из Энска. Участников из других городов не было. Известно, что вероятность при случайном выборе двух участников конкурса получить пару из одного города такая же, как и вероятность получить пару их разных городов. Найдите максимальное возможное значение $n+m$, если известно, что это число не больше 2026.

Решение. Ясно, что способов выбрать двух участников олимпиады C_{n+k}^2. Домножим обе вероятности из условия на это число и перейдём к подсчёту числа способов выбрать двух участников из одного города и числа способов выбрать участников из разных городов. Участников из одного города можно выбрать $\dfrac{n(n-1)}{2}+\dfrac{k(k-1)}{2}$ числом способов, из разных городов – kn. По условию эти числа равны, откуда:

$$\frac{n(n-1)}{2}+\frac{k(k-1)}{2}=kn \Longleftrightarrow n^2-n+k^2-k-2kn=0.$$

Заметим, что уравнение равносильно следующему:

$$(n-k)^2=n+k,$$

то есть общее число участников олимпиады $n+k$ есть квадрат. Заметим, что наибольший квадрат, не превосходящий 2026 есть $45^2=2025$. Остаётся проверить, что такое возможно. Пример реализуется, например, при $n=1035$ и $k=990$.

Ответ: 2025. ■

Задача 3.2 В конкурсе приняли участие m учеников из Эмска и n — из Энска. Участников из других городов не было. Известно, что вероятность при случайном выборе двух участников конкурса получить пару из одного города такая же, как и вероятность получить пару их разных городов. Найдите максимальное возможное значение $n+m$, если известно, что это число не больше 2005.

Ответ: 1936.

Задача 3.3 В конкурсе приняли участие m учеников из Эмска и n — из Энска. Участников из других городов не было. Известно, что вероятность при случайном выборе двух участников конкурса получить пару из одного города такая же, как и вероятность получить пару их разных городов. Найдите максимальное возможное значение $n+m$, если известно, что это число не больше 2125.

Ответ: 2116.

Задача 3.4 В конкурсе приняли участие m учеников из Эмска и n — из Энска. Участников из других городов не было. Известно, что вероятность при случайном выборе двух участников конкурса получить пару из одного города такая же, как и вероятность получить пару их разных городов. Найдите максимальное возможное значение $n + m$, если известно, что это число не больше 2505.

Ответ: 2500.

Задача 4.1 Найдите корни уравнения

$$\sqrt{\sin^2 x + \sin x + 4} - \sqrt{-\cos^2 x + \cos x + 4} = \sin x - \cos x + 1,$$

по модулю не превосходящие 5π. В качестве ответа укажите их сумму, делённую на π.

Решение. Пусть $u = \sqrt{\sin^2 x + \sin x + 4}$, $v = \sqrt{-\cos^2 x + \cos x + 4}$, тогда:

$$u^2 - v^2 = \left(\sqrt{\sin^2 x + \sin x + 4}\right)^2 - \left(\sqrt{-\cos^2 x + \cos x + 4}\right)^2 =$$

$$= \sin^2 x + \sin x + 4 + \cos^2 x - \cos x - 4 = \sin x - \cos x + 1$$

$$u - v = u^2 - v^2 \iff (u-v)(1-u-v) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} u = v, \\ u + v = 1. \end{array}\right.$$

Заметим, что $\sqrt{\sin^2 x + \sin x + 4} = \sqrt{(\sin x + 0.25)^2 + 3.75} > 1$ при $x \in \mathbb{R}$, а также $\sqrt{-\cos^2 x + \cos x + 4} = \sqrt{4.25 - (\cos x - 0.25)^2} > 1$ при $x \in \mathbb{R}$, так как $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$. Тогда: $\sqrt{\sin^2 x + \sin x + 4} + \sqrt{-\cos^2 x + \cos x + 4} \neq 1$ при $x \in \mathbb{R}$.

$$\sqrt{\sin^2 x + \sin x + 4} = \sqrt{-\cos^2 x + \cos x + 4} \iff \sin x - \cos x = -1 \iff$$

$$\iff \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x = 2\pi k; \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}.$$

При $|x| \leqslant 5\pi$:

$$x = -\frac{9\pi}{2};\ -4\pi;\ -\frac{5\pi}{2};\ -2\pi;\ -\frac{\pi}{2};\ 0;\ \frac{3\pi}{2};\ 2\pi;\ \frac{7\pi}{2};\ 4\pi;$$

Найдём сумму корней:

$$-\frac{9\pi}{2} - 4\pi - \frac{5\pi}{2} - 2\pi - \frac{\pi}{2} + 0 + \frac{3\pi}{2} + 2\pi + \frac{7\pi}{2} + 4\pi = -\frac{5\pi}{2}.$$

Ответ: -2.5.

■

Задача 4.2 Найдите корни уравнения

$$\sqrt{\sin^2 x+\sin x+6}-\sqrt{-\cos^2 x-\cos x+6}=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2},$$

по модулю не превосходящие 3π. В качестве ответа укажите их сумму, делённую на π.

Ответ: -1.5.

Задача 4.3 Найдите корни уравнения

$$\sqrt{-\sin^2 x+\sin x+8}-\sqrt{\cos^2 x-\cos x+8}=2\sin x+2\cos x-2,$$

по модулю не превосходящие 7π. В качестве ответа укажите их сумму, делённую на π.

Ответ: 3.5.

Задача 4.3 Найдите корни уравнения

$$\sqrt{-\sin^2 x-\sin x+10}-\sqrt{\cos^2 x-\cos x+10}=\frac{1}{3}\cos x-\frac{1}{3}\sin x-\frac{1}{3},$$

по модулю не превосходящие 9π. В качестве ответа укажите их сумму, делённую на π.

Ответ: -4.5.

Задача 5.1 Три богатыря: Добрыня, Илья и Алёша, собрались выкосить поле ржи. Каждый из них, работая в одиночку, справится за время t_1, t_2 и t_3 соответственно, причем времена t_1, t_2 и t_3 – корни уравнения

$$161t^3 - 93t^2 + 17t - 1 = 0.$$

Алёша предложил косить всем вместе, но Илья возразил, что в таком случае границы останутся без надзора и лучше каждому выкосить ровно по трети поля, пока остальные двое в дозоре. Во сколько раз быстрее богатыри выкосят поле, работая все вместе, чем если они будут работать поочерёдно каждый со своей собственной скоростью уборки ржи?

Решение. Найдем время, за которое богатыри выкосят поле, работая поочередно: $\frac{t_1}{3} + \frac{t_2}{3} + \frac{t_3}{3} = \frac{t_1+t_2+t_3}{3}$. Если же богатыри работают вместе, то время, за которое они выкосят поле:

$$\frac{1}{\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3}} = \frac{t_1t_2t_3}{t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3}.$$

Воспользуемся теоремой Виета для кубического уравнения:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = \frac{93}{161} \\ t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 = \frac{17}{161} \\ t_1t_2t_3 = \frac{1}{161} \end{cases}.$$

Тогда:

$$\frac{t_1 + t_2 + t_3}{3} = \frac{31}{161}.$$

и:

$$\frac{t_1t_2t_3}{t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3} = \frac{1}{161} : \frac{17}{161} = \frac{1}{17}.$$

Найдем отношение времени поочередной работы ко времени совместной работы:

$$\frac{31}{161} : \frac{1}{17} = \frac{527}{161}.$$

Ответ: $\frac{527}{161}$. ■

Задача 5.2 Три богатыря: Добрыня, Илья и Алёша, собрались выкосить поле ржи. Каждый из них, работая в одиночку, справится за время t_1, t_2 и t_3 соответственно, причем времена t_1, t_2 и t_3 – корни уравнения

$$150t^3 - 145t^2 + 26t - 1 = 0.$$

Алёша предложил косить всем вместе, но Илья возразил, что в таком случае границы останутся без надзора и лучше каждому выкосить ровно по трети поля, пока остальные двое в дозоре. Во сколько раз быстрее богатыри выкосят поле, работая все вместе, чем если они будут работать поочерёдно каждый со своей собственной скоростью уборки ржи?

Ответ: $\dfrac{377}{45}$.

Задача 5.3 Три богатыря: Добрыня, Илья и Алёша, собрались выкосить поле ржи. Каждый из них, работая в одиночку, справится за время t_1, t_2 и t_3 соответственно, причем времена t_1, t_2 и t_3 – корни уравнения

$$196t^3 - 161t^2 + 32t - 1 = 0.$$

Алёша предложил косить всем вместе, но Илья возразил, что в таком случае границы останутся без надзора и лучше каждому выкосить ровно по трети поля, пока остальные двое в дозоре. Во сколько раз быстрее богатыри выкосят поле, работая все вместе, чем если они будут работать поочерёдно каждый со своей собственной скоростью уборки ржи?

Ответ: $\dfrac{184}{21}$.

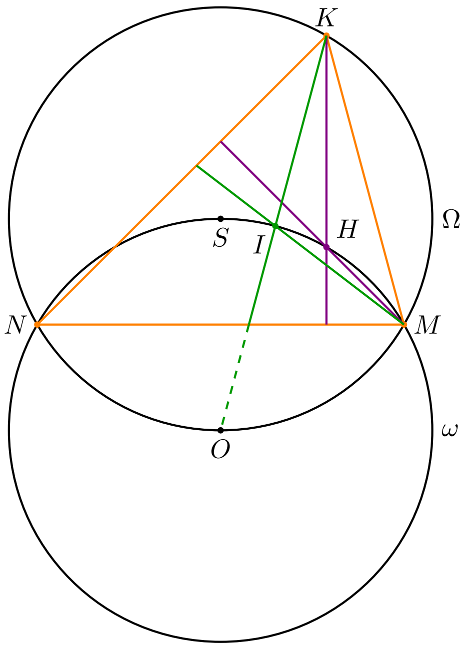
Задача 5.4 Три богатыря: Добрыня, Илья и Алёша, собрались выкосить поле ржи. Каждый из них, работая в одиночку, справится за время t_1, t_2 и t_3 соответственно, причем времена t_1, t_2 и t_3 – корни уравнения

$$242t^3 - 209t^2 + 46t - 1 = 0.$$

Алёша предложил косить всем вместе, но Илья возразил, что в таком случае границы останутся без надзора и лучше каждому выкосить ровно по трети поля, пока остальные двое в дозоре. Во сколько раз быстрее богатыри выкосят поле, работая все вместе, чем если они будут работать поочерёдно каждый со своей собственной скоростью уборки ржи?

Ответ: $\dfrac{437}{33}$.

Задача 6.1 Центр O окружности ω лежит на окружности Ω, MN – общая хорда окружностей. Точка K лежит на Ω, оказалось, что отрезок KO пересекает биссектрису угла $\angle KMN$ на окружности ω, кроме того высоты треугольника KMN пересекаются на ω. Найдите расстояние между центрами окружностей, если $MN = 58\sqrt{3}$.



Решение. Для начала отметим, что KO – биссектриса угла NKM. В самом деле: O – середина дуги NM окружности Ω, не содержащей точки K, то есть $\angle NKO = \angle MKO$. Пусть H – точка пересечения высот треугольника KNM, а I – точка пересечения его биссектрис. Тогда, если $\angle NKM = \alpha$, имеем $\angle NHM = 180^\circ - \alpha$ и $\angle NIM = 90^\circ + \dfrac{\alpha}{2}$, но так как точки N, I, H и M лежат на одной окружности, получаем уравнение на равенство вписанных углов:

$$180^\circ - \alpha = 90^\circ + \frac{\alpha}{2} \Longleftrightarrow \alpha = 60^\circ.$$

Наконец пусть S – центр окружности Ω, тогда $\angle NSM = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$, то есть точка S тоже лежит на ω и расстояние между центрами окружностей SO равно радиусу окружности Ω. По теореме синусов имеем:

$$R = \frac{58\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 58.$$

Ответ: 58.

■

Задача 6.2 Центр O окружности ω лежит на окружности Ω, MN – общая хорда окружностей. Точка K лежит на Ω, оказалось, что отрезок KO пересекает биссектрису угла $\angle KMN$ на окружности ω, кроме того высоты треугольника KMN пересекаются на ω. Найдите расстояние между центрами окружностей, если $MN = 28\sqrt{3}$.

Ответ: 28.

Задача 6.3 Центр O окружности ω лежит на окружности Ω, MN – общая хорда окружностей. Точка K лежит на Ω, оказалось, что отрезок KO пересекает биссектрису угла $\angle KMN$ на окружности ω, кроме того высоты треугольника KMN пересекаются на ω. Найдите расстояние между центрами окружностей, если $MN = 33\sqrt{3}$.

Ответ: 33.

Задача 6.4 Центр O окружности ω лежит на окружности Ω, MN – общая хорда окружностей. Точка K лежит на Ω, оказалось, что отрезок KO пересекает биссектрису угла $\angle KMN$ на окружности ω, кроме того высоты треугольника KMN пересекаются на ω. Найдите расстояние между центрами окружностей, если $MN = 17\sqrt{3}$.

Ответ: 17.