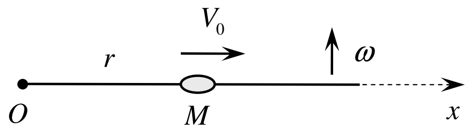
Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2026

Заключительный этап 15 марта 11 класс

Задача 1. Стержень равномерно вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через конец стержня O. Угловая скорость вращения $\omega = 0{,}2$ рад/с. По стержню, в направлении от оси вращения, ползёт муравей M. Скорость муравья относительно стержня постоянна и равна $V_0 = 4$ см/с. В некоторый момент времени муравей находится на расстоянии $r = 30$ см от оси. Считая муравья материальной точкой, найдите следующие величины:

1. Абсолютную величину V скорости муравья относительно плоскости вращения и угол α, который вектор скорости образует с осью x, направленной вдоль стержня.
2. Абсолютную величину a ускорения муравья и угол β, который вектор ускорения образует с осью x.
3. Радиус кривизны R траектории муравья.

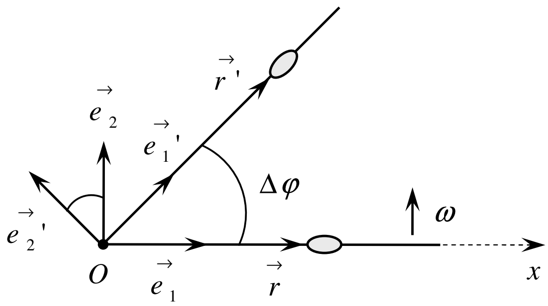


Возможное решение

1. Выберем начало координат в точке O и будем задавать положение муравья при помощи радиус–вектора $\vec{r}$, направленного вдоль стержня. Введём два единичных взаимно ортогональных вектора $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Вектор $\vec{e}_1$ направлен вдоль $\vec{r}$:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{r}}{r},$$

r — длина радиус–вектора. Вектор $\vec{e}_2$ перпендикулярен $\vec{e}_1$ и направлен в сторону вращения стержня. Важно отметить, что векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ жёстко связаны с радиус–вектором и поворачиваются вместе с ним, оставаясь единичными и взаимно ортогональными.



Рассмотрим перемещение муравья за малый промежуток времени Δt. За это время радиус–вектор переходит в новое положение $\vec{r}\,'$, повернувшись на малый угол $\Delta\varphi = \omega\,\Delta t$. На такой же угол поворачиваются векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, переходя в новые положения $\vec{e}_1\,'$ и $\vec{e}_2\,'$. Учитывая, что длина радиус–вектора увеличивается на $V_0\,\Delta t$, для перемещения муравья получаем:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}\,' - \vec{r} = (r + V_0\,\Delta t)\,\vec{e}_1\,' - r\,\vec{e}_1 = r\,\Delta\vec{e}_1 + V_0\,\Delta t\,\vec{e}_1\,',$$

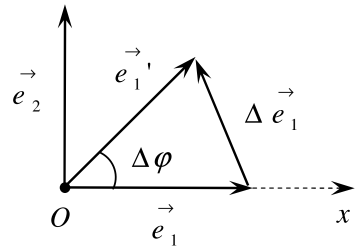
$$\Delta\vec{e}_1 = \vec{e}_1\,' - \vec{e}_1\,.$$

Векторы $\Delta\vec{e}_1$, $\vec{e}_1\,'$ и $\vec{e}_1$ образуют равнобедренный треугольник с единичными боковыми сторонами и углом $\Delta\varphi$ между ними. При малых значениях $\Delta\varphi$ имеем:

$$|\,\Delta\vec{e}_1\,| = 2\,\sin\frac{\Delta\varphi}{2} \approx \Delta\varphi\,.$$

При $\Delta t \to 0$ угол между векторами $\vec{e}_1$ и $\Delta\vec{e}_1$ стремится к $90°$. В этом пределе

$$\Delta\vec{e}_1 = \Delta\varphi\,\vec{e}_2 = \omega\,\Delta t\,\vec{e}_2\,.$$



Во втором слагаемом формулы для перемещения уже имеется малый сомножитель $\Delta\,t$. Поэтому там можно заменить $\overrightarrow{e}_1{}'$ на $\overrightarrow{e}_1$. Получаем:

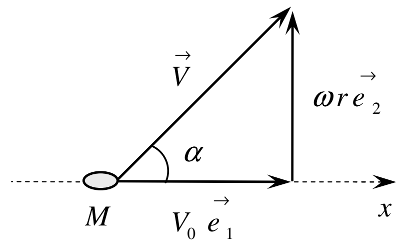
$$\Delta\,\overrightarrow{r} = V_0\,\Delta\,t\,\overrightarrow{e}_1 + \omega\,r\,\Delta\,t\,\overrightarrow{e}_2\,.$$

Скорость муравья равна:

$$\overrightarrow{V} = \frac{\Delta\,\overrightarrow{r}}{\Delta\,t} = V_0\,\overrightarrow{e}_1 + \omega\,r\,\overrightarrow{e}_2\,.$$

Абсолютная величина скорости:

$$V = \sqrt{V_0^2 + (\,\omega\,r\,)^2} \approx 7{,}2\ \text{см/с}\,.$$



Для угла α между вектором скорости и осью x получаем:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\omega\,r}{V_0} \quad \longrightarrow \quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{\omega\,r}{V_0} \approx 56^\circ\,.$$

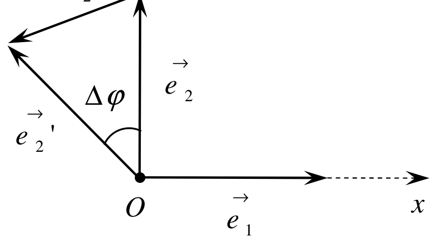
2. Рассмотрим ускорение муравья. За время $\Delta\,t$ скорость муравья меняется от значения $\overrightarrow{V}$, найденного в пункте 1, до значения

$$\overrightarrow{V}{}' = V_0\,\overrightarrow{e}_1{}' + \omega\,(\,r + V_0\,\Delta\,t\,)\,\overrightarrow{e}_2{}'\,.$$

Приращение вектора скорости равно:

$$\Delta\,\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V}{}' - \overrightarrow{V} = V_0\,\overrightarrow{e}_1{}' + \omega\,(r + V_0\,\Delta\,t)\,\overrightarrow{e}_2{}' - (V_0\,\overrightarrow{e}_1 + \omega\,r\,\overrightarrow{e}_2) = V_0\,\Delta\,\overrightarrow{e}_1 + \omega\,r\,\Delta\overrightarrow{e}_2 + V_0\,\omega\,\Delta\,t\,\overrightarrow{e}_2{}'\,,$$

$$\Delta\,\overrightarrow{e}_2 = \overrightarrow{e}_2{}' - \overrightarrow{e}_2\,.$$



Вектор $\Delta\,\overrightarrow{e}_1$ был найден в пункте 1. Вектор $\Delta\,\overrightarrow{e}_2$ нетрудно найти с помощью аналогичных рассуждений:

$$\Delta\,\overrightarrow{e}_2 = -\omega\,\Delta\,t\,\overrightarrow{e}_1\,.$$

Знак минус учитывает тот факт, что в пределе $\Delta t \to 0$ вектор $\Delta \overrightarrow{e}_2$ направлен против вектора $\overrightarrow{e}_1$. В последнем слагаемом формулы для $\Delta \overrightarrow{V}$, содержащем малый сомножитель Δt, можно заменить $\overrightarrow{e}_2{}'$ на $\overrightarrow{e}_2$. Получаем:

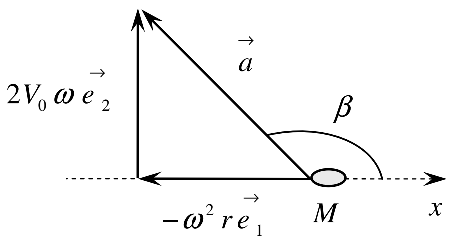
$$\Delta \overrightarrow{V} = V_0 \omega \Delta t \overrightarrow{e}_2 - \omega^2 r \Delta t \overrightarrow{e}_1 + V_0 \omega \Delta t \overrightarrow{e}_2 = -\omega^2 r \Delta t \overrightarrow{e}_1 + 2 V_0 \omega \Delta t \overrightarrow{e}_2 .$$

Ускорение муравья равно:

$$\overrightarrow{a} = \frac{\Delta \overrightarrow{V}}{\Delta t} = -\omega^2 r \overrightarrow{e}_1 + 2 V_0 \omega \overrightarrow{e}_2 .$$

Абсолютная величина ускорения:

$$a = \sqrt{(2 V_0 \omega)^2 + (\omega^2 r)^2} = \omega \sqrt{(2 V_0)^2 + (\omega r)^2} = 2 \text{ см/с}^2 .$$



Вектор ускорения образует с осью x тупой угол β:

$$\beta = 180^\circ - \operatorname{arctg} \frac{2 V_0 \omega}{\omega^2 r} = 180^\circ - \operatorname{arctg} \frac{2 V_0}{\omega r} \approx 127^\circ .$$

3. В данной залаче траекторией муравья является спираль Архимеда. Для того чтобы найти её радиус кривизны, разложим вектор ускорения на две взаимно перпендикулярные составляющие:

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}_\tau + \overrightarrow{a}_n .$$

Составлющая $\overrightarrow{a}_\tau$, направленная по касательной к траектории, называется тангенциальным или касательным ускорением. Составляющая $\overrightarrow{a}_n$ называется нормальным или центростремителным ускорением. Она направлена перпендикулярно касательной в сторону вогнутости траектории. Радиус кривизны траектории R связан с абсолютной величиной нормального ускорения соотношением:

$$a_n = \frac{V^2}{R} .$$

Поскольку полное ускорение муравья уже было рассмотрено в пункте 2, величину a_n можно найти, зная тангенциальное ускорение:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} .$$

Так как вектор скорости $\overrightarrow{V}$ направлен по касательной к траектории, абсолютная величина тангенциального ускорения определяется проекцией полного ускорения $\overrightarrow{a}$ на направление вектора $\overrightarrow{V}$. Учитывая, что угол между векторами $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{V}$ равен $(\beta - \alpha)$, получаем:

$$a_\tau = a \cos(\beta - \alpha), \qquad a_n = \sqrt{a^2 - a^2 \cos^2(\beta - \alpha)} = a \sin(\beta - \alpha),$$

$$R = \frac{V^2}{a_n} = \frac{V^2}{a \sin(\beta - \alpha)} \approx 27{,}5 \text{ см} .$$

Ответ:

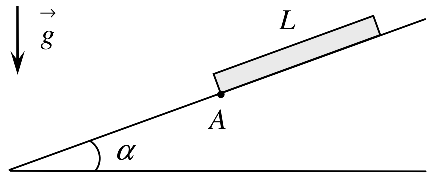
1. $V = \sqrt{V_0^2 + (\omega r)^2} \approx 7{,}2$ см/с, $\quad \alpha = \operatorname{arctg}(\omega r / V_0) \approx 56^\circ$.
2. $a = \omega \sqrt{(2 V_0)^2 + (\omega r)^2} = 2$ см/с^2, $\quad \beta = 180^\circ - \operatorname{arctg}(2 V_0 / \omega r) \approx 127^\circ$.
3. $R = V^2 / (a \sin(\beta - \alpha)) \approx 27{,}5$ см.

Критерии

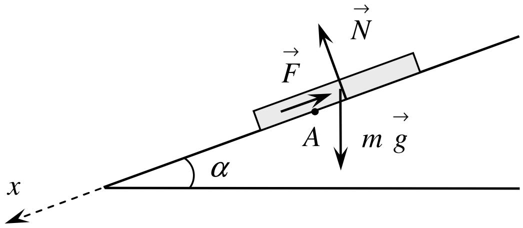
1. Правильно вычислены приращения векторов $\overrightarrow{e}_1$ и $\overrightarrow{e}_2$ за малый промежуток времени (+1 балл).

2. Правильно записано выражение для перемещения (+1 балл).
3. Правильные буквенный и числовой ответы для абсолютной величины скорости (+1 балл).
4. Правильные буквенный и числовой ответы для угла между вектором скорости и осью x (+1 балл).
5. Правильно записано выражение для приращения вектора скорости (+1 балл).
6. Правильные буквенный и числовой ответы для абсолютной величины ускорения (+1 балл).
7. Правильные буквенный и числовой ответы для угла между вектором ускорения и осью x (+1 балл).
8. Правильно найдено тангенциальное ускорение (+1 балл).
9. Правильно найдено нормальное ускорение (+1 балл).
10. Правильные буквенный и числовой ответы для радиуса кривизны траектории (+1 балл).

Задача 2. Наклонная плоскость, образующая с горизонтом угол $\alpha = \arcsin(0.2)$, состоит из двух полуплоскостей, соприкасающихся по прямой, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости рисунка (в дальнейшем прямая A). Верхняя полуплоскость гладкая, нижняя шероховатая. На верхней полуплоскости удерживают однородную прямоугольную доску длиной $L = 1$ м так, что её нижний край лежит на прямой A. Затем доску отпускают без толчка, она начинает двигаться и через некоторое время останавливается, переместившись вдоль плоскости на расстояние L. Найдите время движения доски τ. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Возможное решение



Рассмотрим промежуточное положение доски, в котором она переместилась на расстояние x вдоль наклонной плоскости. На доску действует сила трения скольжения $\overrightarrow{F}$, сила $\overrightarrow{N}$ нормальной реакции наклонной плоскости и сила тяжести $m\,\overrightarrow{g}$ (m — масса доски). Запишем уравнение движения доски в проекции на ось x, выбранную вдоль направления движения:

$$m\,a_x = -F + m\,g\,\sin\alpha\,,$$

a_x — проекция ускорения доски на ось x. Сила трения равна:

$$F = \mu\,N_x\,,$$

μ — коэффициент трения, N_x — сила нормальной реакции, действующая на нижнюю часть доски, лежащую на шероховатой полуплоскости. Длина этой части равна перемещению x, её мвсса

$$m_x = \frac{x}{L}\,m\,.$$

Получаем:

$$N_x = m_x\,g\,\cos\alpha = \frac{m\,g\,x}{L}\,\cos\alpha\,, \qquad F = \frac{\mu\,m\,g\,x}{L}\,\cos\alpha\,,$$

$$m\,a_x = -\frac{\mu\,m\,g\,x}{L}\,\cos\alpha + m\,g\,\sin\alpha \quad\longrightarrow\quad a_x + \frac{\mu\,g\,\cos\alpha}{L}\left(x - \frac{L\,\mathrm{tg}\alpha}{\mu}\right) = 0\,.$$

Обозначим:

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu\,g\,\cos\alpha}{L}}\,, \qquad x_0 = \frac{L\,\mathrm{tg}\alpha}{\mu}\,.$$

Тогда уравнение движения принимает вид:

$$a_x + \omega^2\,(\,x - x_0\,) = 0\,.$$

Такое же уравнение описывает вертикальные колебания груза на пружине. В этом случае ω — круговая частота колебаний, x_0 — смещение положения равновесия под действием постоянной силы тяжести. Используя эту аналогию, находим зависимость перемещения доски от времени:

$$x\,(t) = x_0 + C_1\,\sin\omega\,t + C_2\,\cos\omega\,t\,,$$

C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Проекция скорости на ось x получается дифференцированием этого выражения по времени:

$$V_x\,(t) = C_1\,\omega\,\cos\omega\,t - C_2\,\omega\,\sin\omega\,t\,.$$

Постоянные C_1 и C_2 найдём из начальных условий. Принимая за начало отсчёта времени $t = 0$ момент начала движения, получаем:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x\,(0) & = & 0\,, \\ V_x\,(0) & = & 0\,. \end{array}\right. \quad\longrightarrow\quad \left\{\begin{array}{rcl} x_0 + C_2 & = & 0\,, \\ C_1 & = & 0\,. \end{array}\right. \quad\longrightarrow\quad C_1 = 0\,, \quad C_2 = -x_0\,,$$

$$x\,(t) = x_0\,(\,1 - \cos\omega\,t\,)\,, \qquad V_x\,(t) = x_0\,\omega\,\sin\omega\,t\,.$$

В момент остановки $t = \tau$ имеем дополнительные условия:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x\,(\tau) & = & L\,, \\ V_x\,(\tau) & = & 0\,. \end{array}\right. \quad\longrightarrow\quad \left\{\begin{array}{rcl} x_0\,(\,1 - \cos\omega\,\tau\,) & = & L\,, \\ \sin\omega\,\tau & = & 0\,. \end{array}\right. \quad\longrightarrow\quad \left\{\begin{array}{rcl} 2\,x_0 & = & L\,, \\ \omega\,\tau & = & \pi\,. \end{array}\right.$$

Из этих соотношений находим коэффициент трения μ, частоту ω и время движения τ:

$$2\cdot\frac{L\,\mathrm{tg}\alpha}{\mu} = L \quad\longrightarrow\quad \mu = 2\,\mathrm{tg}\alpha\,,$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2\,\mathrm{tg}\alpha\,g\,\cos\alpha}{L}} = \sqrt{\frac{2\,g\,\sin\alpha}{L}}\,,$$

$$\tau = \frac{\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{L}{2\,g\,\sin\alpha}} = \frac{\pi}{2}\text{ с} \approx 1{,}6\text{ с}\,.$$

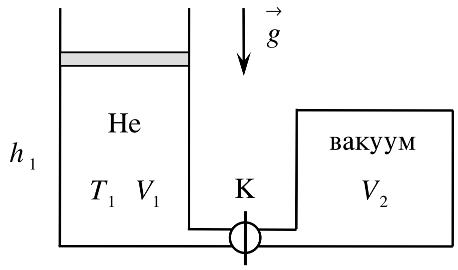
Ответ:

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{L}{2\,g\,\sin\alpha}} = \frac{\pi}{2}\text{ с} \approx 1{,}6\text{ с}\,.$$

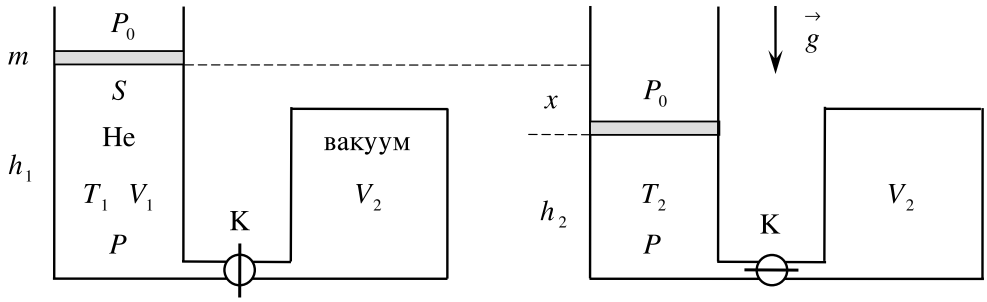
Критерии

1. Правильно указаны силы, действующие на доску (+1 балл).
2. Правильно записано выражение для силы трения (+1 балл).
3. Получено правильное уравнение движения (+1 балл).
4. Правильно записано общее решение уравнения движения (+2 балла).
5. Правильно найдены произвольные постоянные в общем решении (+2 балла).
6. Правильно найден коэффициент трения (+2 балла).
7. Правильные буквенный и числовой ответы для времени движения (+1 балл).

Задача 3. В вертикальном цилиндре, открытом сверху в атмосферу, может свободно двигаться массивный поршень. Цилиндр соединён с сосудом постоянного объёма короткой трубкой с краном К. Сначала кран закрыт, сосуд откачан до глубокого вакуума, в цилиндре под поршнем находится гелий при температуре $T_1 = 300$ К. Известно отношение k объёма сосуда V_2 к объёму гелия V_1: $k = V_2/V_1 = 0{,}5$. Кран открывают, гелий перетекает в правый сосуд, и вся система переходит в новое состояние равновесия. Считая, что все стенки, поршень и трубка с краном не проводят тепло, найдите конечную температуру гелия T_2 и отношение x/h_1, где x — расстояние, на которое переместился поршень, h_1 — высота поршня над дном цилиндра в начальном состоянии. Объём трубки с краном не учитывайте, атмосферное давление считайте постоянным.



Возможное решение



1. Пусть P_0 — атмосферное давление, m и S — масса и площадь поршня, h_2 — высота поршня над дном цилиндра в конечном состоянии, P — начальное и конечное давление газа, ν — число молей газа. Согласно первому началу термодинамики имеем:

$$0 = \nu\, C_V\,(\,T_2 - T_1\,) + A\,,$$

C_V — молярная теплоёмкость при постоянном объёме, A — работа газа. Запишем уравнение баланса энергии для поршня:

$$m\,g\,h_2 - m\,g\,h_1 = A + P_0\,S\,x\,.$$

Второе слагаемое в правой части представляет собой работу постоянной силы атмосферного давления $P_0\,S$ на перемещении x. Полагая $h_1 - h_2 = x$, получаем:

$$A = -(\,P_0\,S + m\,g\,)\,x\,.$$

Выразим работу A через давление газа P, записав условие равновесия поршня в начальном и конечном состояниях:

$$P\,S = P_0\,S + m\,g \quad\longrightarrow\quad A = -P\,S\,x\,.$$

Далее воспользуемся уравнением состояния и выразим работу A через начальную и конечную температуры газа:

$$\begin{cases} P\,V_1 = \nu\,R\,T_1 \\ P\,(\,V_1 + V_2 - S\,x\,) = \nu\,R\,T_2 \end{cases}$$

Полагая $V_2 = k\,V_1$, получаем:

$$P\,V_1\,(\,1+k\,) - P\,S\,x = \nu\,R\,T_2 \quad\longrightarrow\quad \nu\,R\,T_1\,(\,1+k\,) + A = \nu\,R\,T_2 \quad\longrightarrow\quad A = \nu\,R\,T_2 - \nu\,R\,T_1\,(\,1+k\,)\,.$$

Подставляя этот результат в уравнение первого начала термодинамики, находим конечную температуру газа:

$$0 = \nu\,C_V\,T_2 - \nu\,C_V\,T_1 + \nu\,R\,T_2 - \nu\,R\,T_1\,(\,1+k\,) \quad\longrightarrow\quad T_2 = T_1\,\frac{C_P + k\,R}{C_P}\,,$$

$C_P = C_V + R$ — молярная теплоёмкость при постоянном давлении.

2. Найдём теперь перемещение поршня x. Для этого воспользуемся найденными выше выражениями для работы газа:

$$A = -P\,S\,x = \nu\,R\,T_2 - \nu\,R\,T_1\,(\,1 + k\,)\,.$$

Полагая здесь $P = \nu\,R\,T_1/V_1$ и $V_1 = S\,h_1$, получаем:

$$-\nu\,R\,T_1 \cdot \frac{x}{h_1} = \nu\,R\,T_2 - \nu\,R\,T_1\,(\,1 + k\,) \quad \longrightarrow \quad \frac{x}{h_1} = \frac{T_1\,(\,1 + k\,) - T_2}{T_1}\,.$$

Подстановка выражения для T_2 приводит к окончательному ответу:

$$\frac{x}{h_1} = \frac{k}{\gamma}\,,$$

$\gamma = C_P/C_V$ — показатель адиабаты.

Упростим полученные формулы для одноатомного газа. В этом случае $C_V = 3\,R/2$, $C_P = 5\,R/2$, $\gamma = 5/3$,

$$T_2 = T_1\,\frac{5 + 2\,k}{5} = 360\ \text{K}\,, \qquad \frac{x}{h_1} = \frac{3\,k}{5} = 0{,}3\,.$$

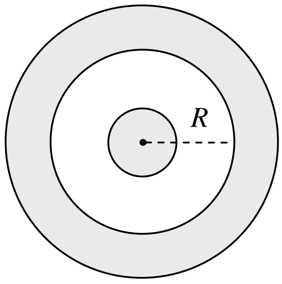
Ответ:

$$T_2 = T_1\,\frac{5 + 2\,k}{5} = 360\ \text{K}\,, \qquad \frac{x}{h_1} = \frac{3\,k}{5} = 0{,}3\,.$$

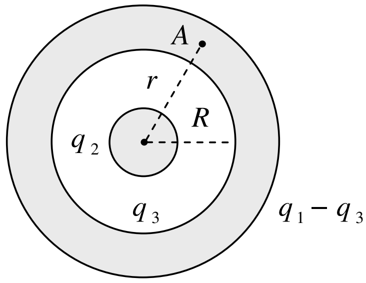
Критерии

1. Правильно записано первое начало термодинамики для газа (+1 балл).
2. Правильно записано уравнение баланса энергии для поршня (+2 балла).
3. Правильно записано условие равновесия поршня (+1 балл).
4. Получено правильное выражение, связывающее работу газа с перемещением поршня (+1 балл).
5. Правильно записано уравнение состояния для начального и конечного положений поршня (+1 балл).
6. Получено правильное выражение, связывающее работу газа с начальной и конечной температурами (+1 балл).
7. Правильные буквенный и числовой ответы для конечной температуры (+1 балл).
8. Получено правильное выражение, связывающее перемещение поршня с начальной и конечной температурами (+1 балл).
9. Правильные буквенный и числовой ответы для перемещения поршня (+1 балл).

Задача 4. Металлический шар окружён концентрическим металлическим сферическим слоем, внутренний радиус которого $R = 6$ см. Слою сообщили заряд $q_1 = 20$ нКл. Найдите заряд q_2, который нужно сообщить шару для того, чтобы электрическое давление на внешнюю поверхность слоя обратилось в нуль. Каково в этом случае электрическое давление P на внутреннюю поверхность слоя? Выразите давление в миллипаскалях и округлите до целого значения. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.



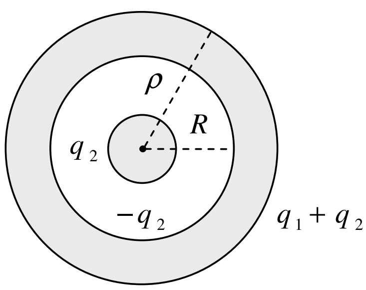
Возможное решение



1. Рассмотрим распределение зарядов на поверхностях сферического слоя. Обозначим через q_3 заряд его внутренней поверхности. Тогда заряд внешней поверхности равен $(\, q_1 - q_3\,)$. Выберем внутри слоя произвольную точку A, лежащую на расстоянии r от центра шара. Напряжённость электрического поля в этой точке равна нулю. Выразим её через заряды:

$$E_A = \frac{(\, q_2 + q_3\,)}{4\,\pi\,\varepsilon_0\, r^2}\,.$$

Из условия $E_A = 0$ получаем, что $q_3 = -q_2$. Таким образом, заряд внутренней поверхности слоя равен $(\, -q_2\,)$, а внешняя поверхность несёт заряд $(\, q_1 + q_2\,)$.



Обозначим радиус внешней поверхности слоя через ρ и рассмотрим электрическое давление P на эту поверхность (силу, действующую со стороны электрического поля на единицу площади поверхности). Мысленно увеличим радиус слоя на малую величину $\Delta\,\rho$. При этом элементарная работа $\delta\,A$ сил электрического поля определяется "газовой"формулой:

$$\delta\,A = P_r\,\Delta\,V\,,$$

где $P_r = \pm P$ в зависимости от направления действия сил давления (от центра шара или к центру), $\Delta\,V = 4\,\pi\,\rho^2\,\Delta\,\rho$ — приращение объёма слоя. Работу $\delta\,A$ можно также записать в виде убыли энергии электрического поля. Учитывая, что энергия меняется только в объёме $\Delta\,V$, имеем:

$$\delta\,A = (\, w_1 - w_2\,)\,\Delta\,V\,.$$

Здесь w_1 и w_2 — плотности энергии поля в объёме ΔV до и после увеличения радиуса внешней поверхности. Приравнивая выражения для элементарной работы, получаем:

$$P_r = w_1 - w_2\,.$$

Плотность энергии w_1 определяется напряжённостью электрического поля E_1 у внешней поверхности слоя радиуса ρ:

$$E_1 = \frac{(\,q_1 + q_2\,)}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,\rho^2} \quad\longrightarrow\quad w_1 = \frac{\varepsilon_0\,E_1^2}{2} = \frac{(\,q_1 + q_2\,)^2}{32\,\pi^2\,\varepsilon_0\,\rho^4}\,.$$

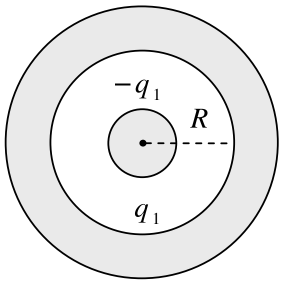
После увеличения радиуса поверхности на $\Delta\,\rho$ весь объём ΔV заполнен металлом. Напряжённость электрического поля в этом объёме обращается в нуль, и плотность энергии $w_2 = 0$. Тогда электрическое давление равно:

$$P_r = w_1 = \frac{(\,q_1 + q_2\,)^2}{32\,\pi^2\,\varepsilon_0\,\rho^4}\,.$$

Полагая $P_r = 0$, находим заряд q_2:

$$P_r = 0 \quad\longrightarrow\quad q_2 = -q_1 == -20\ \text{нКл}\,.$$

Таким образом, заряд $(\,q_1 + q_2\,)$ внешней поверхности сферического слоя равен нулю. Это очевидный результат — электрическое давление на поверхность обращается в нуль, если эта поверхность не заряжена. Окончательно имеем следующее распределение зарядов: весь заряд сферического слоя q_1 сосредоточен на его внутренней поверхности, а заряд шара равен $(\,-q_1\,)$.



2. Рассмотрим электрическое давление на внутреннюю поверхность сферического слоя. Мысленно увеличим его радиус R на малую величину $\Delta\,R$. При этом объём области между слоем и шаром возрастёт на $\Delta V = 4\,\pi\,R^2\,\Delta\,R$. Для электрического давления имеем ту же формулу, что и в пункте 1:

$$P_r = w_1 - w_2\,,$$

где w_1 и w_2 — начальная и конечная плотности энергии поля в объёме ΔV. До увеличения радиуса границы слоя весь объём ΔV заполнен металлом. Напряжённость электрического поля в этом объёме обращается в нуль, и плотность энергии $w_1 = 0$. Плотность энергии w_2 определяется напряжённостью поля E_2 на расстоянии R от центра шара:

$$E_2 = \frac{q_1}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,R^2}\,.$$

Получаем:

$$P_r = -w_2 = -\frac{\varepsilon_0\,E_2^2}{2} = -\frac{q_1^2}{32\,\pi^2\,\varepsilon_0\,R^4}\,.$$

Знак минус означает, что элементы внутренней поверхности слоя притягиваются к шару. Абсолютная величина электрического давления равна:

$$P = |\,P_r\,| = \frac{q_1^2}{32\,\pi^2\,\varepsilon_0\,R^4} = 11\ \text{мПа}\,.$$

Ответ:

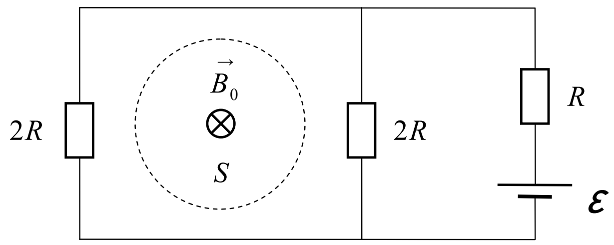
$$q_2 = -q_1 = -20\ \text{нКл}\,,\qquad P = \frac{q_1^2}{32\,\pi^2\,\varepsilon_0\,R^4} = 11\ \text{мПа}\,.$$

Критерии

1. Доказано, что заряд внутренней поверхности сферического слоя равен по абсолютной величине заряду шара и отличается от него знаком (+1 балл).

2. Правильно записано выражение для работы сил электрического поля через давление (+1 балл).
3. Правильно записано выражение для работы сил электрического поля через убыль энергии поля (+1 балл).
4. Получено правильное выражение для электрического давления (+1 балл).
5. Правильно записаны плотности энергии при вычислении давления на внешнюю поверхность слоя (+2 балла).
6. Правильный ответ для заряда шара (+1 балл).
7. Правильно записаны плотности энергии при вычислении давления на внутреннюю поверхность слоя (+2 балла).
8. Правильные буквенный и числовой ответы для давления (+1 балл).

Задача 5. Электрическая цепь состоит из двух плоских контуров, включающих в себя сопротивление $R = 27$ Ом, два сопротиления $2R$ и батарею с ЭДС $\varepsilon = 1{,}5$ В и пренебрежимо малым внутренним сопротивлением. Левый контур охватывает цилиндрическую область площадью поперечного сечения $S = 300$ см^2. В этой области имеется однородное магнитное поле, индукция которого зависит от времени по закону $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B_0} \cos \omega t$, где $\overrightarrow{B_0}$ — постоянный вектор, равный по абсолютной величине 0,2 Тл и направленный перпендикулярно плоскости контура, $\omega = 500$ рад/с. Найдите среднюю за период $T = 2\pi/\omega$ тепловую мощность P, выделяющуюся на сопротивлении R. Ответ выразите в милливаттах и округлите до целого значения.



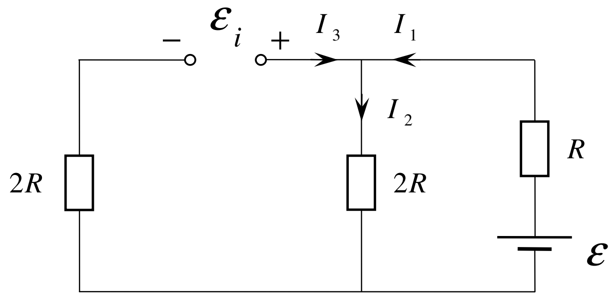
Возможное решение

Направим вектор $\overrightarrow{n}$ единичной нормали к плоскости левого контура вдоль вектора магнитной индукции. Положительное направление обхода контура связано с направлением вектора $\overrightarrow{n}$ правилом правого винта (правилом буравчика). В нашем случае это направление по часовой стрелке. Рассмотрим ЭДС индукции, возникающую в контуре при изменении магнитного поля. Магнитный поток через площадь, ограниченную контуром, равен:

$$\Phi = \overrightarrow{B}\, \overrightarrow{n}\, S = B_0\, S\, \cos \omega t\,.$$

ЭДС индукции:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\,\Phi}{d\,t} = B_0\, S\, \omega\, \sin \omega t\,.$$



Для определённости рассмотрим случай, когда $\sin \omega t > 0$. При этом ЭДС индукции положительна и действует по часовой стрелке. В эквивалентной схеме имеем три неизвестных тока I_1, I_2 и I_3. Применяя правила Кирхгофа, получаем три уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} I_1 + I_3 - I_2 & = & 0\,, \\ I_1\, R + I_2 \cdot 2\, R & = & \varepsilon\,, \\ I_2 \cdot 2\, R + I_3 \cdot 2\, R & = & \varepsilon_i\,. \end{array} \right.$$

Исключая токи I_2 и I_3, находим ток I_1, текущий через сопротивление R:

$$2\, I_2\, R = \varepsilon - I_1\, R\,, \qquad 2\, I_3\, R = \varepsilon_i - 2\, I_2\, R = \varepsilon_i - \varepsilon + I_1\, R\,,$$

$$I_1 + I_3 - I_2 = 0 \quad \longrightarrow \quad 2\, I_1\, R + 2\, I_3\, R - 2\, I_2\, R = 0 \quad \longrightarrow \quad 2\, I_1\, R + \varepsilon_i - \varepsilon + I_1\, R - \varepsilon + I_1\, R = 0\,,$$

$$I_1 = \frac{2\,\varepsilon - \varepsilon_i}{4\, R}\,.$$

Мгновенная мощность, выделяющаяся на сопротивлении R, равна:

$$P\,(t) = I_1^2\, R = \frac{1}{16\, R}\,(\,4\,\varepsilon^2 - 4\,\varepsilon\,\varepsilon_i + \varepsilon_i^2\,)\,.$$

Зависимость от времени входит сюда через ЭДС индукции. Средняя за период $T = 2\,\pi/\omega$ тепловая мощность:

$$P = \frac{1}{16\,R}\,(\,4\,\varepsilon^2 - 4\,\varepsilon\, < \varepsilon_i > + < \varepsilon_i^2 >\,)\,.$$

Здесь $< \varepsilon_i >$ и $< \varepsilon_i^2 >$ — средние значения ε_i и ε_i^2:

$$< \varepsilon_i >= B_0\,S\,\omega\, < \sin\omega\,t >\,, \qquad < \varepsilon_i^2 >= (\,B_0\,S\,\omega\,)^2 < \sin^2\omega\,t > \,.$$

Воспользовавшись тем, что средние за период значения функций $\sin\omega\,t$ и $\sin^2\omega\,t$ равны соответственно нулю и $1/2$, получаем:

$$< \varepsilon_i >= 0\,, \qquad < \varepsilon_i^2 >= \frac{(\,B_0\,S\,\omega\,)^2}{2}\,,$$

$$P = \frac{1}{16\,R}\left[4\,\varepsilon^2 + \frac{(\,B_0\,S\,\omega\,)^2}{2}\right] = \frac{\varepsilon^2}{4\,R}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{B_0\,S\,\omega}{2\,\varepsilon}\right)^2\right] = 31\ \text{мВт}\,.$$

Ответ:

$$P = \frac{\varepsilon^2}{4\,R}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{B_0\,S\,\omega}{2\,\varepsilon}\right)^2\right] = 31\ \text{мВт}\,.$$

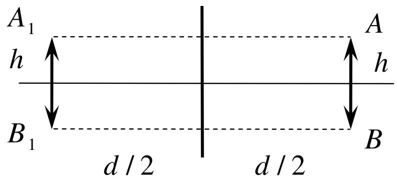
Критерии

1. Правильное выражение для магнитного потока (+1 балл).
2. Правильное выражение для ЭДС индукции (+2 балла).
3. Правильные уравнения для определения токов (+2 балла).
4. Правильный результат для силы тока, текущего через сопротивление R (+1 балл).
5. Правильное выражение для мгновенной тепловой мощности (+1 балл).
6. Правильное усреднение по времени (+2 балла).
7. Правильные буквенный и числовой ответы для средней мощности (+1 балл).

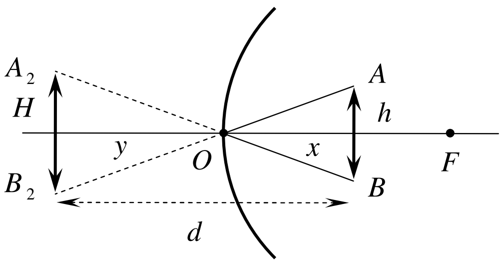
Задача 6. Человек рассматривает изображение своего глаза сначала в плоском зеркале, а затем в вогнутом сферическом зеркале. Во втором случае он видит прямое изображение, увеличенное в $n = 2$ раза по сравнению с отражением в плоском зеркале. Считая, что в обоих случаях глаз аккомодирован на расстояние наилучшего зрения $d = 24$ см, найдите радиус кривизны сферического зеркала R.

Справка. Аккомодация — способность глаза изменять оптическую силу при изменении положения предмета. Расстояние наилучшего зрения — оптимальное расстояние от предмета до глаза, при котором удобнее всего рассматривать детали предмета.

Возможное решение



Пусть A и B — верхняя и нижняя точки глаза, h — его вертикальный размер, отрезок A_1B_1 — мнимое изображение глаза в плоском зеркале. Это изображение играет роль предмета, который рассматривает человек. По условию расстояние между изображением и глазом равно расстоянию наилучшего зрения d, зеркало расположено посередине этого отрезка, высота изображения равна h.



Рассмотрим отражение глаза в вогнутом сферическом зеркале. Точка O, в которой оптическая ось глаза пересекает поверхность зеркала, — полюс зеркала, точка F — фокус. Тот факт, что человек видит прямое изображение гзаза, означает, что глаз расположен между полюсом и фокусом. В этом случае изображение глаза A_2B_2 является мнимым. Оно расположено на продолжении лучей, отражённых от зеркала в полюсе O, и играет роль предмета, который рассматривает человек. Поэтому расстояние между изображением и глазом также равно расстоянию наилучшего зрения d. Обозначим высоту изображения через H. Поскольку в обоих случаях изображения расположены на одном и том же расстоянии d от глаза, отношение малых углов зрения, под которыми глаз видит своё отражение, равно отношению высот изображений H и h:

$$n = \frac{H}{h}\,.$$

Обозначим через x расстояние от глаза до полюса зеркала и через y расстояние от полюса до изображения A_2B_2. Из подобия равнобедренных треугольников AOB и A_2OB_2 имеем:

$$\frac{y}{x} = \frac{H}{h} = n \quad \longrightarrow \quad y = nx\,.$$

Учитывая равенство $x + y = d$, получаем:

$$x = \frac{d}{n+1}\,, \qquad y = \frac{nd}{n+1}\,.$$

Далее воспользуемся формулой зеркала:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{2}{R}\,, \qquad \frac{n+1}{d} - \frac{n+1}{nd} = \frac{2}{R}\,, \qquad \frac{n+1}{d}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{R}\,,$$

$$R = \frac{2nd}{n^2-1} = 32 \text{ см}\,.$$

Ответ:

$$R = \frac{2nd}{n^2-1} = 32 \text{ см}\,.$$

Критерии

1. Правильно указано положение изображения в плоском зеркале (+1 балл).
2. Правильно указано расстояние d между глазом и изображением в плоском зеркале (+1 балл).
3. Правильно указано положение глаза относительно вогнутого зеркала (между фокусом и полюсом) (+1 балл).
4. Правильно указано положение изображения в вогнутом зеркале (на продолжении лучей, отражённых в полюсе) (+1 балл).
5. Правильно указано расстояние d между глазом и изображением в вогнутом зеркале (+1 балл).
6. Правильно указана связь увеличения n с отношением размеров изображений (+1 балл).
7. Правильно найдены расстояния от глаза до вогнутого зеркала и от зеркала до изображения (+2 балла).
8. Правильно записана формула зеркала (+1 балл).
9. Правильные буквенный и числовой ответы для радиуса вогнутого зеркала (+1 балл).