Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2026

Заключительный этап   14 марта

9 класс

Задача 1. Для некоторых натуральных чисел n: $n^2-5n-23$ – квадрат целого числа. Найдите сумму всех таких чисел n.

Ответ: 53.

Решение. Пусть $n^2-5n-23=k^2$, $k \in$. Домножим обе части равенства на 4:

$$4n^2-20n-4k^2=92 \Leftrightarrow (2n-5)^2-4k^2=117 \Leftrightarrow (2n-2k-5)(2n+2k-5)=117.$$

Найдём все пары целых чисел, произведение которых равно 117: $(1;117)$, $(-1;-117)$, $(3;39)$, $(-3;-39)$, $(9;13)$, $(-9;-13)$, $(13;9)$, $(-13;-9)$, $(39;3)$, $(-39;-3)$, $(117;1)$, $(-117;-1)$.

Пусть $a\cdot b=117$, тогда

$$\begin{cases} n=\dfrac{a+b+10}{4}, \\ k=\dfrac{b-a}{4}. \end{cases}$$

Заметим, что для симметричных пар чисел значения n одинаковые и для всех перечисленных пар $(a;b)$ $k \in$. Найдем значения n для всех $(a;b)$:

1. Для $(1;117)$: $n=\dfrac{1+117+10}{4}=\dfrac{128}{4}=32$;

2. Для $(3;39)$: $n=\dfrac{3+39+10}{4}=\dfrac{52}{4}=13$;

3. Для $(9;13)$: $n=\dfrac{9+13+10}{4}=\dfrac{32}{4}=8$.

Все остальные значения n совпадают с найденными. Для $(a;b): a,b<0$ значения n отрицательны.

Таким образом, натуральные n: 8, 13 и 32 – их сумма: $8+13+32=53$.

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Допущена вычислительная ошибка, не влияющая на ход решения — 6 баллов.

2. Исходное выражение преобразовано в вид $(2n-2k-5)(2n+2k-5) = 117$ — 4 балла.

Задача 2. Ковбой Джон хватает со стола револьвер и случайно расстреливает весь семизарядный барабан в три манекена (без единого промаха!) Какова вероятность того, что в первом манекене появится ровно пять дыр от пуль, а в двух оставшихся – по одной?

Ответ: $\dfrac{14}{729}$.

Решение. Ясно, что вероятность попадания в первый маникен равна $\dfrac{1}{3}$, во второй – $\dfrac{1}{3}$ и ровно такая же в третий. Тогда остается вычислить сколькими способами можно «расстрелять» маникены. Рассмотрим перестановки из семи патронов, пять из которых подписаны цифрой 1, а из оставшихся двух один помечен цифрой 2, а другой – цифрой 3. Тогда последовательностей из пяти единиц, одной двойки и одной тройки ровно столько, сколько нужно. Таких последовательностей

$$\frac{7!}{5!1!1!} = 42,$$

так как 7 патроном можно переставить 7! способами, с учетом повторов патронов с единичкой – каждую последовательность пересчитали в 5! раз больше чем нужно. Итого, в силу независимости:

$$\mathbb{P} = 42 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{14}{729}.$$

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Верно вычислено число «подходящих» элементарных исходов — 3 балла.

Задача 3. Города Альфск, Бетск и Гаммск с населением, соответственно равным α, β и γ в тысячах человек, расположены в вершинах остроугольного треугольника ABC (Альфск – вершина A, Бетск – вершина B, Гаммск – вершина C), причём $\angle ABC = 45^\circ$. Мэры этих городов решили договориться и построить аэропорт в такой точке, чтобы сумма расстояний, увеличенных пропорционально населению от городов до построенного аэропорта, была минимальна, то есть в точке X, минимизирующей сумму $AX \cdot \alpha + BX \cdot \beta + CX \cdot \gamma$. Оказалось, что построить аэропорт пришлось в центре описанной около треугольника ABC окружности. Чему равно населения Бетска, если $\alpha = 30$ и $\gamma = 40$?

Ответ: 50 (тыс. человек)

Решение. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, R — её радиус. Тогда $OA = OB = OC = R$. Единичные векторы от O к вершинам:

$$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{OA}}{R}, \quad \vec{b} = \frac{\overrightarrow{OB}}{R}, \quad \vec{c} = \frac{\overrightarrow{OC}}{R}.$$

Условие того, что точка O минимизирует взвешенную сумму расстояний:

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0},$$

что равносильно

$$\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} = \vec{0}.$$

Угол $\angle ABC = 45^\circ$ является вписанным и опирается на дугу AC. Поэтому центральный угол $\angle AOC$, опирающийся на ту же дугу, равен $\angle AOC = 2\angle ABC = 90^\circ$. Значит, $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OC}$.

Выразим $\beta\overrightarrow{OB} = -\big(\alpha\overrightarrow{OA} + \gamma\overrightarrow{OC}\big)$ и возведём в квадрат обе части:

$$\beta^2 R^2 = \alpha^2 R^2 + \gamma^2 R^2 + 2\alpha\gamma(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}).$$

Но $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$ из-за перпендикулярности. Следовательно,

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2.$$

Подставляем $\alpha = 30$ тыс. чел., $\gamma = 40$ тыс. чел.:

$$\beta^2 = 30^2 + 40^2 = 50^2,$$

откуда $\beta = 50$ (тыс. чел.).

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Доказано, что $OA \perp OC$ — 3 балла.

Задача 4. Решите систему:

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{z} + \dfrac{yz}{x} + \dfrac{zx}{y} \leqslant 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 12. \end{cases}$$

Ответ: $|x| = |y| = |z| = 2$.

Решение. Пусть $\dfrac{xy}{z} + \dfrac{yz}{x} + \dfrac{zx}{y} = a$, тогда

$$a^2 = \left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2 + 2x^2 + 2y^2 + 2z^2.$$

Но из неравенства $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + ac + bc$ – следствия неравенства Коши-Буняковского, имеем оценку:

$$\left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2 + 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geqslant 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 36.$$

То есть $|a| \geqslant 6$, то есть в неравенстве выполнено равенство и $|x| = |y| = |z| = 2$.

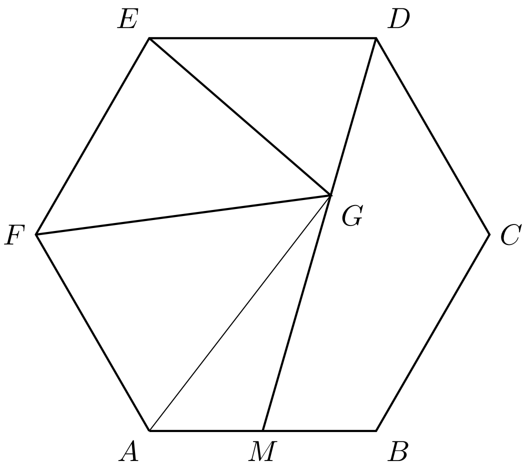
Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Доказано, что $a \geqslant 6$, и получено решение $x = y = z = 2$ — 4 балла.

Задача 5. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ точка M – середина стороны AB. На отрезке MD выбрана такая точка G, что $S_{MBCD} = S_{MAFG}$. При этом $S_{DEG} = 2$. Найдите площадь шестиугольника $ABCDEF$.

Ответ: 15.

Решение.



Пусть $\dfrac{MG}{MD} = k$ и S – искомая площадь шестиугольника. Тогда по свойствам площадей:

$$S_{MBCD} = \frac{S}{3}, \quad S_{AMG} = \frac{kS}{6}, \quad S_{AFG} = \frac{(1+3k)S}{12}$$

и $S_{DEG} = \dfrac{(1-k)S}{3}$.

По условию $S_{AFG} + S_{AMG} = S_{MBCD}$, то есть

$$\frac{(1+3k)S}{12} + \frac{kS}{6} = \frac{S}{3} \Longleftrightarrow k = \frac{3}{5}.$$

Остаётся воспользоваться площадью треугольника DEG :

$$S_{DEG} = 2 = \frac{(1-k)S}{3} \Longleftrightarrow S = 15.$$

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения следующие критерии *суммируются*:

1. Получено выражение для площади AMG — 1 балл.
2. Получены выражения для площадей AMG и $MBCD$ — 3 балла.