

**Задача 1.** Найдите наибольшее значение выражения  $\frac{5bc - 6ab + ac}{a^2 - 3bc + b^2}$ , если известно  $a - 3b = 16c$  и  $\frac{4}{a} + \frac{2}{b} = \frac{1}{2c}$ .

Ответ:  $\frac{20}{11}$ .

Решение.

Пусть  $u = \frac{a}{c}$ ,  $v = \frac{b}{c}$ . Тогда:

$$u - 3v = 16, \quad \frac{4}{u} + \frac{2}{v} = \frac{1}{2}.$$

Из первого  $u = 16 + 3v$ . Подставим во второе:

$$\frac{4}{16 + 3v} + \frac{2}{v} = \frac{1}{2} \Rightarrow 8v + 4(16 + 3v) = v(16 + 3v) \Rightarrow 3v^2 - 4v - 64 = 0.$$

Корни:  $v = \frac{16}{3}$  или  $v = -4$ . Соответственно  $u = 32$  или  $u = 4$ .

Выразим  $\frac{5bc - 6ab + ac}{a^2 - 3bc + b^2}$  через  $u, v$ :

$$\frac{5bc - 6ab + ac}{a^2 - 3bc + b^2} = \frac{u + 5v - 6uv}{u^2 + v^2 - 3v}.$$

Для пары  $u = 32$ ,  $v = \frac{16}{3}$ :

$$\frac{u + 5v - 6uv}{u^2 + v^2 - 3v} = -\frac{543}{583};$$

для пары  $u = 4$ ,  $v = -4$ :

$$\frac{u + 5v - 6uv}{u^2 + v^2 - 3v} = \frac{20}{11}.$$

Ясно, что наибольшее значение равно  $\frac{20}{11}$ .

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Верно найдены две пары решений  $u, v$  — 3 балла.
2. Вычислительная ошибка, не влияющая на ход решения — 6 баллов.

**Задача 2.** На островах необъятного океана расположено  $N > 10$  пиратских баз, среди которых есть база «Тортуга», причём все пиратские базы находятся на попарно разном удалении друг от друга. В некоторый момент времени из каждой базы отправился корабль, причём каждый корабль взял курс на ближайшую морскую базу. Какое наибольшее число кораблей могло прибыть на «Тортугу»?

*Ответ:* 5.

*Решение.* Покажем, что больше пяти кораблей на Тортугу прибыть не могло. Допустим на Тортугу  $T$  прибыло 6 кораблей с баз  $A_1, A_2, \dots, A_6$ . Рассмотрим шестиугольник  $A_1A_2A_3 \dots A_6$ . Ясно, что  $A_1A_2 > A_1T$  и  $A_1A_2 > A_2T$ . То есть по неравенству треугольника  $\angle A_1TA_2 > 60^\circ$ . Но аналогично  $\angle A_2TA_3 > 60^\circ, \dots, \angle A_6TA_1 > 60^\circ$ , то есть

$$\angle A_1TA_2 + \dots + \angle A_6TA_1 > 360^\circ - \text{противоречие.}$$

Осталось показать, что 5 кораблей могли приплыть на Тортугу. Конструктивный пример даётся, например, так: отложим от точки  $T$  углы  $64^\circ, 68^\circ, 72^\circ, 76^\circ, 80^\circ$ . Достаточно теперь положить на сторонах полученных углов вершины  $A_1, A_2, \dots, A_5$  так, чтобы  $TA_1 > TA_2 > TA_3 > \dots > TA_5$ .

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Приведена оценка, но пример отсутствует — 3 балла.

**Задача 3.** В клубе дискуссий по одному историческому вопросу 31 участник придерживается мнения “а”, 13 участников – мнения “б” и 6 – мнения “с”. Если два участника с разными мнениями начинают диалог, каждый из них меняет свое мнение на третье (например, если говорят участники с мнениями “а” и “с”, то оба меняют мнение на “б”). В какой-то момент времени в клубе ровно 4 участника придерживаются мнения “с”. Какое наибольшее число участников с мнением “а” может оказаться в клубе после этого?

Ответ: 44.

*Решение.* Пусть  $A$  человек представляют мнение “а”,  $B$  человек — мнение “б”,  $C$  человек — мнение “с”. Заметим, что разности  $A - B$ ,  $B - C$ ,  $A - C$  не меняют остаток при делении на 3. Например, диалог представителей мнений “а” и “б” меняет их мнение на “с”; до диалога представителей мнений  $A$ ,  $B$  и  $C$ , после:  $A' = A - 1$ ,  $B' = B - 1$ ,  $C' = C + 2$ . Проверим:

$$A' - B' = (A - 1) - (B - 1) = A - B$$

— разность не изменилась,

$$A' - C' = (A - 1) - (C + 2) = A - C - 3$$

— остаток при делении на 3 не изменился,

$$B' - C' = (B - 1) - (C + 2) = B - C - 3$$

— аналогично.

Рассмотрим остатки от деления на 3 разностей мнений, которых придерживались участники изначально:

$$A - B = 18 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$A - C = 25 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$B - C = 7 \equiv 1 \pmod{3}$$

В какой-то момент  $C = 4$ , тогда:

$$A - C \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow A - 4 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow A \equiv 2 \pmod{3}.$$

$$A + B + C = 50 \Rightarrow A + B = 46$$

$A \equiv 2 \pmod{3}$  и  $A \leq 46$ , тогда наибольшее значение  $A = 44$  и  $B = 2$ .

$$B - C = -2 \equiv 1 \pmod{3}$$

Найдем последовательность диалогов, приводящих к данному состоянию. Например, три диалога между представителями мнений “а” и “б” и восемь диалогов между представителями мнений “б” и “с” (возможна и другая последовательность диалогов).

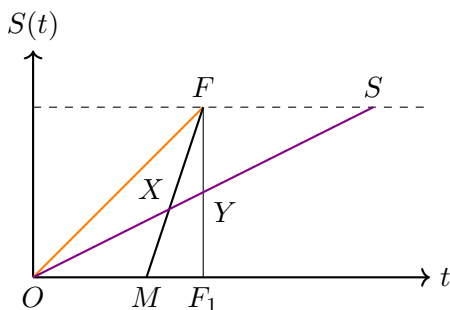
Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Приведена оценка, но пример отсутствует — 5 баллов.
2. Верно найден инвариант, но дальнейшая оценка и пример отсутствуют — 3 балла.

**Задача 4.** Кот Матроскин, Шарик и Дядя Фёдор решили провести в Простоквашино триатлон – гонку из трёх последовательных этапов: велогонки, заплыва и бега. Герои стартуют одновременно, причём известно, что скорость, с которой дядя Фёдор едет на велосипеде, равна скорости плавания Шарика, а бежит Шарик в два раза медленнее дяди Фёдора, зато Матроскин едет на велосипеде в два раза быстрее Шарика и бежит в три раза быстрее дяди Фёдора. Оказалось, что дядя Фёдор вышел на берег после заплыва одновременно с Шариком, а финишировал одновременно с Матроскиным. Дистанции для заплыва и велозабега одинаковы, а дистанция бега в два раза больше. Какую часть общего пути осталось преодолеть Шарика, когда его обогнал кот Матроскин?

*Ответ:* 0.3 пути.

*Решение.* Ясно, что для ответа на вопрос задачи нам достаточно рассмотреть лишь промежуток бега персонажей. Поступим сообразно решению аналогичной задачи из отборочного этапа олимпиады и рассмотрим графики движения персонажей в координатах  $t, S(t)$  :



Движение Матроскина отмечено отрезком  $MF$ , дяди Фёдора – отрезком  $OF$ , а движение Шарика – отрезком  $OS$ . Тогда  $X$  – точка обгона Шарика Матроскиным.

Заметим, что на момент финиша Матроскина и дяди Фёдора Шарик преодолел ровно половину от дистанции бега, так как его скорость вдвое

меньше скорости дяди Фёдора, то есть  $FY : YF_1 = 1 : 1$ , если  $F_1$  – проекция  $F$  на ось времени. Аналогично  $MF_1 : MO = 1 : 2$ . Применим к треугольнику  $MF_1F$  и прямой  $XU$  теорему Менелая:

$$\frac{FY}{YF_1} \cdot \frac{F_1O}{OM} \cdot \frac{MX}{XF} = 1,$$

откуда  $MX : XU = 2 : 3$ . Остаётся вспомнить, что участок бега по протяжённости равен сумме участков с зашльвом и велопробежкой, обозначим их за  $\ell$ . Получаем, что Шарик у осталось пробежать:

$$\frac{\frac{3}{5} \cdot 2\ell}{4\ell} = 0.3$$

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Допущена вычислительная ошибка, не влияющая на ход решения — 6 баллов.
2. Доказано, что  $MX : XU = 2 : 3$  или аналогичное утверждение при отличном от графического решении — 4 балла.

**Задача 5.** В равностороннем треугольнике  $ABC$  на стороне  $AB$  как на диаметре построена окружность. На окружности внутри треугольника выбрана точка  $F$ . Точка  $H$  – основание перпендикуляра из точки  $C$ , лежит на продолжении  $AF$  за точку  $F$ , причём  $FH = 2\sqrt{3}$  и  $CH = 1$ . Найдите сторону треугольника  $ABC$ .

*Ответ:*  $\sqrt{76}$ .

*Решение.* Обозначим  $AF = m$ ,  $BF = x$ ,  $AB = a$ . Тогда по т. Пифагора в  $\triangle ABF$ :

$$a^2 = m^2 + x^2. \quad (1)$$

По т. Пифагора в  $\triangle AHC$ :

$$a^2 = (m + 2\sqrt{3})^2 + 1^2 \iff a^2 = m^2 + 4\sqrt{3}m + 13. \quad (2)$$

Наконец, по т. Пифагора для прямоугольного треугольника  $BCK$  ( $K$  – основание перпендикуляра из  $C$  на  $BF$ ):

$$a^2 = (x + 1)^2 + (2\sqrt{3})^2 \iff a^2 = x^2 + 2x + 13. \quad (3)$$

Приравнивая (1) и (2) и (1) и (3) уравнения, получим систему:

$$\begin{cases} x^2 = 4\sqrt{3}m + 13, \\ m^2 = 2x + 13. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы имеем

$$4\sqrt{3}m = x^2 - 13 \iff m = \frac{x^2 - 13}{4\sqrt{3}}.$$

Тогда

$$m^2 = \frac{(x^2 - 13)^2}{48}.$$

Приравнивая выражения для  $m^2$ , получаем:

$$\frac{(x^2 - 13)^2}{48} = 2x + 13 \iff (x^2 - 13)^2 = 48(2x + 13).$$

Раскрываем скобки:

$$\begin{aligned} x^4 - 26x^2 + 169 &= 96x + 624, \\ x^4 - 26x^2 - 96x - 455 &= 0. \end{aligned}$$

По следствию из теоремы Безу находим корень  $x_1 = -5$ . Выполним деление многочлена на  $x + 5$ :

$$(x + 5)(x^3 - 5x^2 - x - 91) = 0.$$

Продолжая перебор делителей свободного члена, находим корень  $x_2 = 7$ . Тогда уравнение приобретает вид:

$$(x + 5)(x - 7)(x^2 + 2x + 13) = 0,$$

причём уравнение  $x^2 + 2x + 13 = 0$  действительных корней не имеет (дискриминант отрицательный). Значит, единственное положительное решение  $x = 7$ .

Тогда  $AF^2 = m^2 = 2 \cdot 7 + 13 = 27$  и  $a = \sqrt{m^2 + x^2} = \sqrt{27 + 49} = \sqrt{76}$ .

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Допущена вычислительная ошибка, не влияющая на ход решения — 6 баллов.
2. Получено уравнение  $x^4 - 26x^2 - 96x - 455 = 0$  — 4 балла.