Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2026

Заключительный этап 14 марта

7 класс

Задача 1. В городе N есть n домов. Дом в этом городе считается многоэтажным, если в нём больше 5 этажей. Выясните, что больше: доля многоэтажных домов от всех домов в городе или доля этажей, которые находятся во всех многоэтажных домах, от общего числа этажей во всех домах в городе?

Ответ: доля этажей в многоэтажных домах $\geqslant$ доля многоэтажных домов.

Решение.

Обозначим:
n - общее количество домов в городе
k - количество многоэтажных домов
Очевидно, $k \leqslant n$.
Заметим, что достаточно сравнить доли, а не проценты. Доля многоэтажных домов по отношению к общему числу домов $= \dfrac{k}{n}$.

Посчитаем долю этажей в многоэтажных домах к общему количеству этажей во всех домах. Пусть $P1-$ общее количество этажей во всех многоэтажных домах, а $P2$ - общее количество этажей в низких домах ($\leqslant 5$) этажей. Всего этажей во всех домах $P = P1 + P2$.

Доля этажей в многоэтажных домах к общему количеству этажей во всех домах $= \dfrac{P1}{P}$.

Вычтем:

$$\frac{P1}{P} - \frac{k}{n} = \frac{nP1 - kP}{Pn} = \frac{nP1 - k(P1 + P2)}{Pn} = \frac{(n-k)P1 - kP2}{Pn}$$

Рассмотрим числитель, так как знаменатель всегда положительный. По условию: $P1 > 5k$, $P2 \leqslant 5(n-k)$. Тогда нижняя оценка числителя:

$$\text{Числитель} \geqslant (n-k)5k - k5(n-k) = 0$$

Значит этажей в многоэтажных домах $\geqslant$ многоэтажных домов. Равенство достигается, когда все дома многоэтажные.

Замечание:

Также можно решить, введя среднее количество этажей в многоэтажных домах: $a = \dfrac{a_1k_1 + .. + a_nk_n}{k}$, где k_i- количество многоэажных домов с количеством этажей, равным a_i. Тогда вместо $P1$ можно написать ak, где $a > 5$. Провести аналогичные рассуждения.

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Введены обозначения и правильно посчитаны доли, которые нужно сравнивать (либо введено среднее количество этажей, см. замечание) — 2 балла.
2. Правильно написано выражение для разности долей — 5 баллов
3. Есть оценка числителя, но не написан случай равенства — 6 баллов

Задача 2. Астроном Иван изучает звёзды с помощью своего нового телескопа. За время исследования он нашёл n ярких звёзд и $n-1$ тусклых и хочет их запомнить. У Ивана отличная зрительная память, поэтому он придумал следующий способ запоминания: для каждой яркой звезды он строит связи с n любыми другими звёздами, а для каждой тусклой звезды — с $n+1$ любыми другими звёздами. Докажите, что у Ивана не получится таким способом запомнить все звёзды.

Решение.

Иван пытается построить граф, в котором звезды являются вершинами, а связи между ними - ребрами. Посчитаем сумму степеней вершин в таком графе:

$$n^2 + (n-1)(n+1) = 2n^2 - 1$$

Заметим, что $2n^2 - 1$ - нечетное число. Вспомним, что сумма степеней вершин в графе четна, так как каждое ребро, соединяя две вершины, учитывается дважды. Значит Ивану не удастся построить такой граф и запомнить все звезды.

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Задача сведена к теории графов. Сказано, что звезды - вершины, связи - ребра — 1 балл.

2. Сделан один из следующих шагов — 4 балла:

   – посчитано количество вершин в графе

   – написано, что сумма степеней вершин в графе чётна

Задача 3. Ира и Саша играют в игру, делая ходы по очереди. У них есть прямая линия из 20 клеток, в первой клетке сидит кузнечик. В свой ход его можно подтолкнуть либо на 4 клетки вперёд, либо на одну клетку назад. Например, из второй клетки кузнечик может попасть либо в первую, либо в шестую клетку. Побеждает тот, кто подтолкнет кузнечика в двадцатую клетку. За границы линии выходить нельзя. Ира ходит первая. Кто победит при правильной игре?

Ответ: выиграет первый игрок, Ира.

Решение.

Нужно расписать выигрышные и проигрышные позиции(В и П соответственно). Проигрышной считается та, из которой можно попасть в выигрышную, а выигрышной та, из которой ТОЛЬКО в проигрышную. Делается это с конца(с самой правой, 20й клетки).
20 клетка - В
В 20 можно прийти из 16 => 16 клетка - П
В 16 можно прийти из 12 и 17. Из 17 можем только в 16 => 17 - В
про 12 пока не можем точно сказать, так как из нее можем прийти в 16 и 11. Пропускаем пока что. Рассмотрим 17. в 17 можно прийти из 18 и 13. Так как 17 - В, то и 13 - П и 18 - П.

Продолжая эти рассуждения, получим:

П В П П В П П В П П В П П В П П В П В В
Выигрывает тот, кто после своего первого хода ставит кузнечика в клетку В. То есть, первый игрок, Ира.

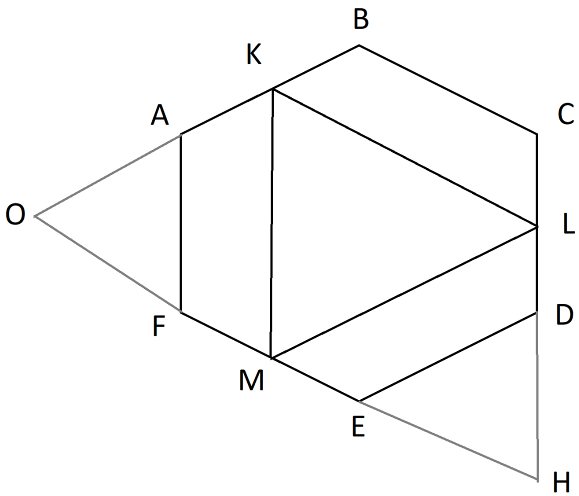
Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Задача сведена к записи выигрышных и проигрышных позиций с конца и определено, что такое выигрышная и проигрышная позиции — 2 балла.

2. Правильно расписаны позиции как минимум первых 5 клеток в порядке рассуждения (20я, 16я, 17я, 13я, 18я) — 5 баллов

Задача 4. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. На серединах сторон AB, CD и EF отметили точки K, L и M соответственно. Докажите, что треугольник KLM - равносторонний.

Решение.



Вспомним, что углы в правильном шестиугольнике равны 120 градусам. Продолжим стороны многоугольника за точки A и F до пересечения. Получим треугольник AOF. Углы OFA, OAF равны по 60 градусов. Следовательно оставшийся угол в треугольнике OAF равен 60 градусам и треугольник является равносторонним. Треугольник MOK равнобедренный, следовательно углы при стороне MK по 60 градусов и он тоже равносторонний.

Выполним аналогичное построение до треугольника за точки E, D. Получим треугольник EDH. Выполним аналогичные рассуждения по поводу углов и получим, что угол EML равен 60 градусам.

Тогда, так как угол FME развернутый и равен 180 ггрaдусам, с одной стороны, а с другой стороны, равен сумме углов FMK, KML, LME, два из которых равны по 60 градусов, то угол KML также равен 60 градусам.

Выполняя аналогичные построения и рассуждения можно найти еще один угол в треугольнике KML. Он будет равен 60 градусам.

Таким образом докажем, что треугольник равносторонний.

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Сделан один из следующих шагов — 2 балла:

   – дополнительное построение

   – определение величины угла в правильном шестиугольнике

   – использование свойств параллельности прямых или свойств треугольников для нахождения нужных в решении углов

Задача 5. Найдите значение выражения при $x = 2$:

$$\frac{x^{2026} + x^{2024} + x^{2023} + x^5 + 3x^3 + x^2 + 2x + 2}{x^{2025} + x^{2023} + x^4 + 3x^2 + 2}.$$

Ответ: $\frac{11}{5}$.

Решение.

Сократим дробь. Обозначим числитель $P(x)$, знаменатель $Q(x)$. Найдем НОД$(P(x), Q(x))$. Поделим столбиком $P(x)$ на $Q(x)$. Получим

$$P(x) = Q(x) * x + (x^{2023} + x^2 + 2)$$

Из алгоритма Евклида следует, что НОД$(P(x), Q(x)) =$ НОД$(Q(x), x^{2023} + x^2 + 2)$. Разделим $Q(x)$ на $x^{2023} + x^2 + 2$. Получим:

$$Q(x) = (x^{2023} + x^2 + 2) * (x^2 + 1)$$

Таким, образом:

$$P(x) = (x^{2023}+x^2+2)*(x^2+1)*x+(x^{2023}+x^2+2) = (x^{2023}+x^2+2)(x^3+x+1)$$

Тогда дробь примет вид:

$$\frac{(x^{2023} + x^2 + 2)(x^3 + x + 1)}{(x^{2023} + x^2 + 2) * (x^2 + 1)} = \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1}$$

Подставим $x = 2$:

$$\frac{2^3 + 2 + 1}{2^2 + 1} = \frac{11}{5}$$

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Правильно выполнен первый шаг алгоритма Евклида — 4 балла
2. Получена правильная сокращенная дробь без подстановки $x = 2$ — 6 баллов