Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2026

Заключительный этап 14 марта

6 класс

Задача 1. Первого мая Агроном посадил несколько цветов сорта «Супер красивые» в ряд и 30-го мая обнаружил, что неприжившихся в 4 раза меньше, чем прижившихся. Он исправил свои ошибки, и все следующие посадки приживались: каждый месяц 1-го числа он сажал по одному новому цветку между каждыми двумя прижившимися. 30-го августа всего оказалось 793 цветка. Сколько цветов было посажено первого мая, если до этого цветов сорта «Супер красивые» не было?

Ответ: 125.

Решение.

Пусть x - количество прижившихся цветов после 1 месяца. Количество высаженных после первого месяца равно $x-1$. Тогда всего цветов стало $2x-1$. После второго месяца прижились все цветы, количество не изменилось. После второго месяца было высажено $2x-2$ цветов и всего их стало: $4x-3$. Аналогично после третьего месяца все цветы прижились, их количество не изменилось. В последний раз было высажено $4x-4$ цветов и всего их стало $8x-7$. Из условия получим уравнение на x:

$$8x-7=793 \to x=100$$

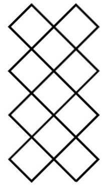
Тогда всего первого мая Агроном посадил $100+25=125$ цветов.

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Верно записано количество прижившихся цветов в конце второго месяца — 3 балла.

2. Получено правильное уравнение — 6 баллов

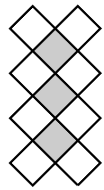
Задача 2. Злая Колдунья заточила Принцессу в темнице, схема комнат которой изображена на рисунке (одна клетка — одна комната). Между любой парой соседних по стороне комнат есть переход. Чтобы спасти Принцессу, Принц указывает на три комнаты, заплатив за это Колдунье 10 золотых. Если Принцесса находится в одной из указанных комнат, Колдунья освобождает её. Если нет, то Колдунья заставляет Принцессу перейти в соседнюю комнату (Принцесса сама выбирает, какую). Принц ни в какой момент не видит, где находится Принцесса. За какое наименьшее количество золотых Принц сможет гарантированно освободить Принцессу?



Ответ: 20

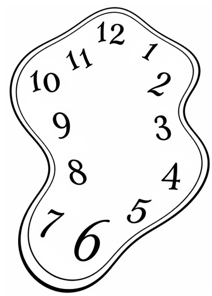
Решение.

За 10 золотых Принц не сможет гарантированно освободить Принцессу. Покажем, как ему освободить Принцессу за 20 золотых. Для этого ему нужно два раза указать на серые клетки (см. рисунок). Действительно, если Принцесса в самом начале стояла на серой клетке, то Принц сможет ее освободить уже за 10 золотых. Если же Принцесса изначально была на белой клетке, то после первой неудачи Принца она обязательно перейдет на серую клетку, а тогда во второй раз Принц обязательно ее освободит.



Любое полное решение оценивается в 7 баллов.

Задача 3. При регистрации на сайте с математическими задачами необходимо пройти проверку «Я – не робот». Для этого нужно предложенную картинку с числами разделить на несколько необязательно равных и ровных частей так, чтобы в полученных частях суммы чисел были одинаковыми. Мише попалось изображение, как на рисунке. Помогите Мише пройти проверку, если изображение нужно разделить на 4 части.



Решение.

Сумма чисел от 1 до 12 равна 78, что на 4 не делится, поэтому будем проводить разрезы между цифрами одного числа так, что части не будут пересекаться. Например, так. Разобьем 11 и 10, получив 1, 1, 1, 0. Тогда пусть первая часть состоит из $8+7$, вторая из $9+6+0$, третья из $1+3+$

$4+5+1+1$ (по единичке от 10 и 11), а четвертая – $12+2+1$ (оставшаяся единичка от 11).

Также, например, можно разделить на пересекающиеся части, суммы в которых равны 21: $10+11$, $9+12$, $8+7+6$, $6+5+4+3+2+1$.

Любое полное решение оценивается в 7 баллов.

Задача 4. Найдите последнюю цифру числа $1^3+3^3+5^3...+2025^3+2027^3$.

Ответ: 6.

Решение.

Заметим, что для каждой пятерки чисел $1^3+3^3+5^3+7^3+9^3; 11^3+13^3+15^3+17^3+19^3; ...$ сумма слагаемых оканчивается на одно и то же число – на 5. Таких пятерок 202, значит, их сумма оканчивается на 0. Сумма оставшихся чисел $2021^3+2023^3+2025^3+2027^3$ оканчивается на 6. Значит, исходная сумма оканчивается на 6.

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Верно определена последняя цифра одной пятерки — 2 балла.
2. Верно посчитано число пятерок — 2 балла.
3. В целом верное решение, но допущена одна арифметическая ошибка — 6 баллов.

Задача 5. Найдите наименьшее натуральное число, сумма цифр которого делится на 11 с остатком 3 и сумма цифр следующего за ним числа делится на 11 с остатком 7.

Ответ: 69999999.

Решение.

Пусть $S(n), S(n+1)-$ сумма цифр в чисалх $n, n+1$ соответственно. Заметим, что при добавлении 1 к числу сумма его цифр меняется на $-9k+1$, где $k-$ количество девяток в последних разрядах числа. Тогда соотношение между суммами можно записать так:

$$S(n) - 9k + 1 = S(n+1)$$

Исходя из условия $S(n)$ можно представить так: $S(n) = 11a + 3$. Аналогично $S(n + 1) = 11b + 7$. Теперь:

$$11a + 3 - 9k + 1 = 11b + 7$$

$$11(a - b) = 9k + 3$$

Найдем k, при котором $9k + 3$ кратно 11. Недолго поумножать, найдем, что $k = 7$. Значит в числе n в конце стоит семь девяток. Осталось подобрать первую цифру числа (начинаем с одной, так как нужно наименьшее), такую что сумма цифр делится на 11 с остатком 3. Подходит 6.

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Записано, как меняется сумма цифр числа после добавления к нему 1 — 2 балла.
2. Сделан один из следующих шагов — 1 балл:

   – составлено уравнение на соотношение между суммами,

   – суммы представлены в виде $11x +$ остаток
3. Доказано, что $k = 7$ — 5 баллов