Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2026

Заключительный этап 14 марта

11 класс

Задача 1. Назовем *интересными* рациональные числа вида $\dfrac{a^2+b^2}{ab}$, где a и b — произвольные натуральные числа. Какие натуральные числа можно представить в виде суммы нескольких (возможно, одного или повторяющихся) интересных чисел?

Ответ: Все натуральные числа, кроме 1 и 3.

Решение. Ясно, что если два натуральных числа m и n представимы в виде суммы интересных чисел, то и число $m+n$ представимо в таком виде. Заметим, что числа

$$2 = \frac{1^2+1^2}{1\cdot 1} \quad \text{и} \quad 5 = \frac{2^2+1^2}{2\cdot 1} + \frac{2^2+1^2}{2\cdot 1}$$

представимы. Поэтому представимы все четные числа (как суммы двоек) и все нечетные числа, большие 3 (как сумма пятерки и некоторого количества двоек).

Осталось понять, что числа 1 и 3 непредставимы. Для этого заметим, что каждое интересное число не меньше 2, потому что по неравенству Коши (неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим) $\dfrac{a^2+b^2}{ab} \geqslant \dfrac{2ab}{ab} = 2$. Отсюда сразу следует, что 1 нельзя представить в виде суммы интересных чисел. Если число 3 представимо, то оно в точности равно интересному числу, т.к. иначе сумма двух и более интересных чисел будет не меньше 4. Но уравнение $a^2-3ab+b^2=0$ не имеет натуральных решений, т.к. из него следует, что $\dfrac{a}{b} = \dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{Q}$.

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Доказано, что представимы отдельные числа (2, 4, 5...), но не доказано представление бесконечного множества натуральных числе — 0 баллов.

2. Приведен верный ответ, но отсутствуют какие-либо доказательства — 0 баллов.

3. Доказано, что можно представить бесконечно много натуральных чисел, но верного ответа нет — 1 балл.

4. Доказано, что представимы 2 и все числа, большие 3 — 2 балла.

5. Доказано, что 1 непредставимо — 1 балл.

6. Доказано, что 3 непредставимо — 2 балла.

Задача 2. Числа x, y и z таковы, что

$$\frac{\sin x + \sin y + \sin z}{\sin(x+y+z)} = \frac{\cos x + \cos y + \cos z}{\cos(x+y+z)} = 2.$$

Вычислите $\cos(x+y) + \cos(y+z) + \cos(z+x)$.

Ответ: 2.

Решение. Преобразуем наши равенства следующим образом:

$$\sin x + \sin y + \sin z = 2\sin(x+y+z) = 2\big(\sin(x+y)\cos z + \cos(x+y)\sin z\big),$$
$$\cos x + \cos y + \cos z = 2\cos(x+y+z) = 2\big(\cos(x+y)\cos z - \sin(x+y)\sin z\big).$$

Домножая первую строку на $\sin z$, вторую на $\cos z$ и складывая, получаем следующее соотношение:

$$\sin z(\sin x + \sin y + \sin z) + \cos z(\cos x + \cos y + \cos z) = 2\cos(x+y)$$

(в правой части сокращаются слагаемые, содержащие $\sin(x+y)$, а коэффициент при $\cos(x+y)$ будет равен $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$).

Сложим аналогичные равенства для $\cos(y+z)$ и $\cos(z+x)$ и получим следующее:

$$\begin{aligned}(\sin x + \sin y + \sin z)&(\sin x + \sin y + \sin z) + \\ &+ (\cos x + \cos y + \cos z)(\cos x + \cos y + \cos z) = \\ &= 2\big(\cos(x+y) + \cos(y+z) + \cos(z+x)\big).\end{aligned}$$

Подставляя в левую часть формулы $\sin x + \sin y + \sin z = 2\sin(x+y+z)$ и $\cos x + \cos y + \cos z = 2\cos(x+y+z)$, получаем, что

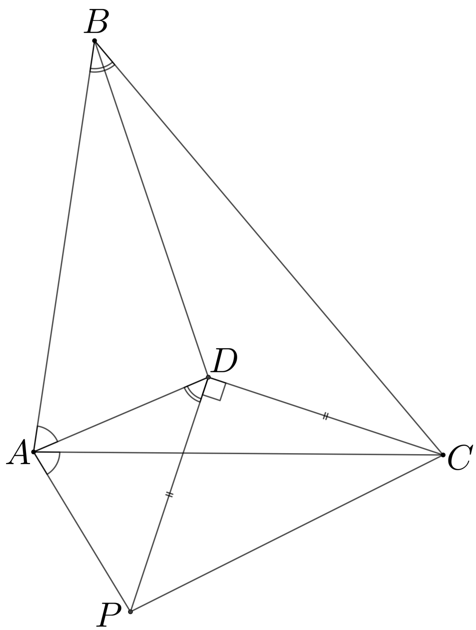
$$\begin{aligned}2\big(\cos(x+y) + &\cos(y+z) + \cos(z+x)\big) = \\ &= (\sin x + \sin y + \sin z)^2 + (\cos x + \cos y + \cos z)^2 = \\ &= 4\big(\sin^2(x+y+z) + \cos^2(x+y+z)\big) = 4,\end{aligned}$$

откуда следует, что $\cos(x+y)+\cos(y+z)+\cos(z+x)=2$.

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Получено выражение величины $\cos(x+y)$ (или или суммы других двух переменных) через синусы и косинусы чисел x, y и z, но дальнейшие продвижения отсутствуют — 2 балла.

Задача 3. Внутри остроугольного треугольника ABC отмечена точка D, такая, что $AB \cdot CD = AD \cdot BC$. Также известно, что $\angle ADC = \angle ABC + 90°$. Чему равна величина $\dfrac{AC \cdot BD}{AB \cdot CD}$?



Ответ: $\sqrt{2}$.

Решение. Проведем в точке D перпендикуляр к отрезку CD и отложим на нем отрезок $DP = DC$, как на рисунке. Заметим, что тогда соотношение $AB \cdot CD = AD \cdot BC$ переписывается в виде $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{DP}$. Кроме того, $\angle ABC = \angle ADC - 90° = \angle ADP$. Значит, треугольники ABC и

ADP подобны по двум сторонам и углу между ними. Отсюда получаются два равенства. Во-первых, $\angle BAC = \angle DAP$, откуда следует, что $\angle BAD = \angle CAP$. Во-вторых, соотношение $\dfrac{AC}{AP} = \dfrac{AB}{AD}$. Из этих двух равенств следует еще одно подобие по двум сторонам и углу между ними: на этот раз треугольников BAD и CAP. Из этого подобия следует, что $\dfrac{BD}{CP} = \dfrac{AB}{AC}$. Поскольку по теореме Пифагора $CP = \sqrt{2}CD$, окончательно находим $\dfrac{AC \cdot BD}{AB \cdot CD} = \dfrac{AC}{AB} \cdot \dfrac{\sqrt{2}BD}{CP} = \sqrt{2}$.

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Отмечена точка P, но других продвижение нет — 1 балл.
2. Доказано подобие треугольников ABC и ADP, дальнейшие продвижения отсутствуют — 2 балла.
3. Доказано подобие треугольников BAD и CAP, дальнейшие продвижения отсутствуют — 4 балла.
4. Полученный ответ неверен из-за вычислительной ошибки, но все логические рассуждения правильные — 5 баллов.

Задача 4. В таблице $n \times n$ произвольным образом расставлены числа от 1 до n^2. Для каждой пары чисел, находящихся в одном столбце или в одной строке, посчитаем отношение большего числа к меньшему. Назовем *характеристикой* таблицы наименьшее из полученных чисел. Каково наибольшее возможное значение характеристики таблицы?

Ответ: $\dfrac{n+1}{n}$.

Решение. Пример таблицы с характеристикой $\chi = \dfrac{n+1}{n}$ строится следующим образом. Рассмотрим таблицу

1	n^2-n+2	$\dots$	$2n$
$n+1$	2	$\dots$	$3n$
$2n+1$	$n+2$	$\dots$	$4n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n^2-n+1	n^2-2n+2	$\dots$	n

В каждом столбце любые два числа отличаются не менее чем на n, а в каждой строке — не менее чем на $n-1$. Значит, отношение любых двух чисел в одном столбце не меньше $\dfrac{a+n}{a} = 1 + \dfrac{n}{a} \geqslant 1 + \dfrac{n}{n^2-n} = \dfrac{n}{n-1} < \dfrac{n+1}{n}$, а отношение любых двух чисел в одной строке не меньше $\dfrac{a+(n-1)}{a} = 1 + \dfrac{n-1}{a}$. Если $a \leqslant n^2 - n$, то $1 + \dfrac{n-1}{a} \geqslant 1 + \dfrac{n-1}{n^2-n} = \dfrac{n+1}{n}$, что и требовалось. Если $a = n^2 - n + 1$, то несложно видеть, что все остальные числа в строке строго меньше a, поэтому число a не может появиться в знаменателе.

Теперь докажем, что характеристика χ любой таблицы не превосходит числа $\dfrac{n+1}{n}$. Построенный нами пример показывает, что наименьшее значение отношения двух чисел, стоящих в одном ряду таблицы, достигается на числах, близких к n^2. Поэтому будем рассматривать самые большие числа в нашей таблице и оценивать отношения пар среди них. Сначала возьмем числа n^2, n^2-1, $\ldots$, $n^2-(n-1)$. Если какие-то два числа из этого набора стоят в одном столбце или в одной строке, то $\chi \leqslant \dfrac{n^2}{n^2-n+1} < \dfrac{n+1}{n}$ (т.к. $n^3 < (n^2-n+1)(n+1) = n^3+1$). Если же все эти числа стоят в разных строках и в разных столбцах, рассмотрим следующее по величине число n^2-n. Рассмотрим строку и столбец, содержащие число n^2-n. Тогда максимальное число в одном ряду с ним не больше n^2, а второе по величине — не больше n^2-1. Значит, посчитав отношение этого числа к n^2-n, получаем, что $\chi \leqslant \dfrac{n^2-1}{n^2-n} = \dfrac{n+1}{n}$, что и требовалось.

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Приведен верный ответ — 1 балл.
2. Построен обоснованный пример таблицы с характеристикой $\dfrac{n+1}{n}$ — 2 балла.
3. Доказано, что характеристика таблицы не больше $\dfrac{n+1}{n}$ — 4 балла.

Задача 5. Дан квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + ax - 1$. Паша нашел три вещественных решения уравнения $f(f(f(x))) = x$. Докажите, что если Паша постарается, то найдет еще два вещественных решения.

Решение. Пусть x_1 и x_2 — решения уравнения $f(x) = x$ (такие решения существуют, поскольку квадратный трехчлен $f(x) - x$ принимает отрицательное значение -1 в точке $x = 0$ и имеет положительный старший коэффициент). Далее, пусть $t \neq x_1,\ x_2$ — некоторое решение уравнения $f(f(f(x))) = x$, найденное Пашей (такое есть, поскольку Паша нашел три решения). Заметим, что тогда числа $f(t)$ и $f(f(t))$ также являются решениями нашего уравнения. Более того, эти числа различны и не равны t: в самом деле, если $f(t) = t$, то $t = x_1$ или $t = x_2$, что неверно; если $f(f(t)) = t$, то $t = f(f(f(t))) = f(t)$, что невозможно, и наконец, если $f(t) = f(f(t))$, то $f(f(t)) = f(f(f(t))) = t$, что также невозможно..

Таким образом, уравнение $f(f(f(x))) = x$ имеет не менее пяти корней: x_1, x_2, t, $f(t)$, $f(f(t))$. Поэтому, если Паша постарается, еще два корня найдутся.

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Присутствует идея рассмотрения корней x_1 и x_2, но решение не получено — 2 балла.

2. Сформулировано и доказано, что уравнение $f(f(f(x))) = x$ имеет решение, отличное от x_1, x_2 — 3 балла.

3. В решении присутствуют мелкие недочеты (например, не доказано, что числа t, $f(t)$, $f(f(t))$ различны) — 6 баллов.

Задача 6. По кругу стоят n школьников попарно разного роста $h_1 < h_2 < \ldots < h_n$ (школьники стоят в произвольном порядке). Если школьник ростом h_k стоит рядом по часовой стрелке со школьником ростом не больше h_{k-2}, они меняются местами. В каждой перестановке меняется местами одна пара школьников. Докажите, что не более чем через C_n^3 перестановок школьники перестанут меняться местами.

Решение. Докажем, что школьники с ростом h_i и h_j, где $i < j$, поменяются местами не более $j - i - 1$ раз. Будем вести доказательство индукцией по $j - i$. Для $j - i = 1$ утверждение следует из условия. Чтобы сделать переход, рассмотрим только трех школьников: i, $i + 1$, и j. Тогда после первой перестановки, произошедшей между школьниками i и j, они будут стоять по кругу в порядке i, j, $i + 1$. Значит, чтобы им поменяться местами еще раз, сначала придется поменяться местами школьникам $i+1$

и j, а это можно сделать не более $j-(i+1)-1$ раз по предположению индукции.

Таким образом, искомое количество перестановок не превосходит $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i-1)$. Докажем, что эта сумма равна C_n^3. Проще всего это сделать так. Обозначим нашу сумму через $f(n)$. Заметим, что $f(3)=1=C_3^3$. Кроме того,

$$f(n)-f(n-1)=\sum_{1\leqslant i\leqslant n-1}(n-i-1)=(n-1)^2-\frac{n(n-1)}{2}=C_{n-1}^2=C_n^3-C_{n-1}^3.$$

Таким образом, величины $f(n)$ и C_n^3 совпадают при $n=3$, а также изменяются на одну и ту же величину при увеличении n на единицу. Значит, $f(n)=C_n^3$, что и требовалось.

Решение. Рассмотрим школьника с наибольшим ростом h_n. Он сможет сделать не более $n-2$ перестановок, пока не встанет рядом со школьником роста h_{n-1}. Будем теперь мыслить этих двух школьников как одного школьника роста h_{n-1}. Теперь он сможет сделать не более $2\cdot(n-3)$ перестановок, пока не встанет рядом со школьником роста h_{n-2} (множитель «2» возникает из-за того, что на самом деле теперь шаги совершают два школьника h_n и h_{n-1}). Продолжая аналогично, мы получаем, что общее количество перестановок не превосходит суммы

$$1\cdot(n-2)+2\cdot(n-3)+\ldots+(n-2)\cdot(n-(n-1)).$$

Преобразуем эту сумму следующим образом. Сначала посчитаем сумму первых слагаемых: она равна $n\cdot(1+2+\ldots+(n-2))=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{2}=3C_n^3$. Теперь посчитаем вторую часть (слагаемые со знаком «$-$»): она равна $1\cdot2+2\cdot3+\ldots+(n-2)\cdot(n-1)$. Докажем, что она равна $2C_n^3$ (тогда итоговая сумма будет в точности равна C_n^3). Это легко сделать по индукции или использовав соображение из первого решения: $2C_{n+1}^3-2C_n^3=(n-1)n$, что верно.

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Доказано, что количество перестановок школьников конечно — 1 балл.

2. Сформулировано и доказано, что количество перестановок школьников i, j не превосходит $|j-i|-1$ (решение 1) — 2 балла.

3. Приведена формула для оценки количества перестановок в виде суммы (как в решениях 1 и 2 или эквивалентных им) — 4 балла.