

# Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2026

Заключительный этап 14 марта

10 класс

**Задача 1.** Найти наименьшее натуральное число  $n$ , большее 1000, такое, что среди чисел  $n - 1000$ ,  $n - 999$ ,  $n - 998$ ,  $\dots$ ,  $n - 1$ ,  $n$ ,  $n + 1$ ,  $\dots$ ,  $n + 998$ ,  $n + 999$ ,  $n + 1000$  наибольшую сумму цифр имеет число  $n$ .

*Ответ:* 9999.

*Решение.* Заметим, что если в каком-либо из чисел  $n + 1$ ,  $n + 10$ ,  $n + 100$ ,  $n + 1000$  при выполнении операции сложения не происходит перехода через разряд, то такое число  $n$  нам не годится. Значит, число  $n$  должно заканчиваться на 9999, поскольку в первых четырех разрядах должны стоять девятки. С другой стороны, несложно видеть, что число  $n = 9999$  подходит: при вычитании любого числа от 1 до 1000 сумма цифр строго уменьшится, а при прибавлении любого числа от 1 до 1000 получится число, лежащее на отрезке  $[10000; 10999]$ . Ясно, что сумма цифр чисел от этого отрезка не превосходит  $1 + 0 + 9 + 9 + 9 < 9 + 9 + 9 + 9$ .

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Приведен только ответ — 1 балл.
2. Доказано, что число 9999 удовлетворяет условию — 2 балла.
3. Доказано, что число имеет вид  $\dots 9999$ , но дальнейшие продвижения отсутствуют — 2 балла.

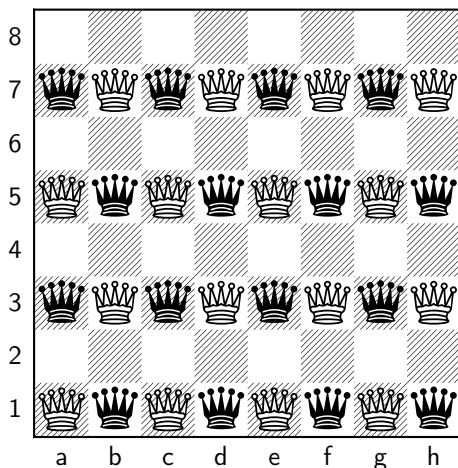
**Задача 2.** Скажем, что два ферзя на шахматной доске *видят друг друга*, если они стоят или на одной горизонтали, или на одной вертикали, или на одной диагонали, и между ними нет других ферзей. Какое наибольшее количество ферзей (белых и черных) можно расставить на клетчатой доске  $8 \times 8$  так, чтобы ферзи одного цвета не видели друг друга?

*Ответ:* 32.

*Решение.* Докажем оценку. Для этого разобьем нашу доску на шестнадцать квадратов  $2 \times 2$ . Заметим, что в квадрате  $2 \times 2$  не могут стоять

два ферзя одного цвета, поэтому в каждом таком квадратике не больше двух ферзей, а значит, всего на доске может стоять не более  $2 \cdot 16 = 32$  ферзей.

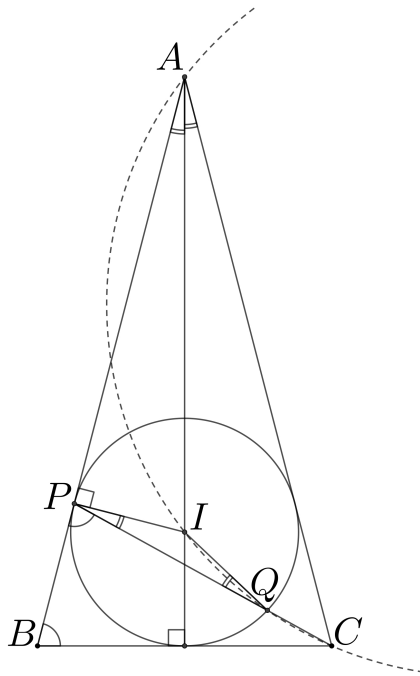
Пример с 32 ферзями строится следующим образом (см. рисунок).



Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Приведен пример — 2 балла.
2. Присутствует идея рассмотрения небольшого фрагмента доски с верной и обоснованной оценкой количества ферзей (в квадрате  $2 \times 2$  не больше двух ферзей, в прямоугольнике  $2 \times 4$  не больше 4 ферзей. . . ), но дальнейшие продвижения отсутствуют — 2 балла.
3. Доказана оценка на 32 ферзя — 4 балла.

**Задача 3.** Дан равнобедренный остроугольный треугольник  $ABC$  ( $AB = AC$ ). Его вписанная окружность  $\omega$  с центром в точке  $I$  касается стороны  $AB$  в точке  $P$ . Отрезок  $CP$  вторично пересекает окружность  $\omega$  в точке  $Q$ . Известно, что точки  $C, Q, I, A$  лежат на одной окружности. Найдите  $AB : BC$ .



Ответ: 2.

*Решение.* Сначала заметим, что  $\angle CAI = \angle IQP$  в силу вписанности четырехугольника  $ACQI$ . Далее, поскольку треугольники  $ABC$  и  $IPQ$  — равнобедренные,  $\angle BAI = \angle CAI$  и  $\angle IPQ = \angle IQP$ . Из этих равенств следует, что  $\angle BAI = \angle IPQ$ . Тогда  $\angle CBP = 90^\circ - \angle BAI = 90^\circ - \angle IPQ = \angle BPC$ , поэтому треугольник  $BPC$  равнобедренный.

В свою очередь отсюда следует, что треугольники  $ABC$  и  $CBP$  подобны: они оба равнобедренные и имеют одинаковый угол при вершине  $B$ . Отсюда  $\frac{BC}{BP} = \frac{AB}{BC}$ . Из отрезков касательных следует, что  $BC = 2 \cdot BP$ , поэтому  $AB = 2 \cdot BC$ .

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Доказано, что треугольник  $BPC$  равнобедренный (или счетом углов, или вычислением длин отрезков) — 3 балла.

**Задача 4.** Найдите все неотрицательные числа  $x, y, z$ , удовлетворяющие равенству  $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{2-z^2} + z\sqrt{3-x^2} = 3$ .

Ответ:  $(1, 0, \sqrt{2})$ .

*Решение.* Оценим левую часть равенства, пользуясь неравенством Коши (неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим):

$$\begin{aligned} x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{2-z^2} + z\sqrt{3-x^2} &= \\ &= \sqrt{x^2(1-y^2)} + \sqrt{y^2(2-z^2)} + \sqrt{z^2(3-x^2)} \leq \\ &\leq \frac{x^2 + (1-y^2)}{2} + \frac{y^2 + (2-z^2)}{2} + \frac{z^2 + (3-x^2)}{2} = 3. \end{aligned}$$

Значит, каждое из неравенств  $\sqrt{x^2(1-y^2)} \leq \frac{x^2 + (1-y^2)}{2}$ ,  $\sqrt{y^2(2-z^2)} \leq \frac{y^2 + (2-z^2)}{2}$ ,  $\sqrt{z^2(3-x^2)} \leq \frac{z^2 + (3-x^2)}{2}$  должно обратиться в равенство. Это в свою очередь означает, что

$$x^2 = 1 - y^2, \quad y^2 = 2 - z^2, \quad z^2 = 3 - x^2.$$

Складывая эти три равенства, получаем, что  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ , откуда уже легко найти  $x^2 = 1$ ,  $y^2 = 0$  и  $z^2 = 2$ . Вспоминая, что числа  $x, y$  и  $z$  неотрицательны, находим единственную тройку  $(1, 0, \sqrt{2})$ .

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. В ответ включены отрицательные числа — 6 баллов.
2. Только ответ — 1 балл.
3. В решении содержится идея использования неравенства Коши без дальнейших продвижений — 1 балл.

**Задача 5.** Множество натуральных чисел  $S$  называется *свободным*, если для любых  $a, b \in S$  число  $ab$  не принадлежит  $S$ , и для любого  $c \in S$  число  $c^2$  также не принадлежит  $S$ . На какое наименьшее количество свободных множеств можно разбить множество  $\{2, 3, 4, \dots, 2^{14} - 1\}$ ?

Ответ: 3.

*Решение.* Выделим из нашего множества степени двойки, т.е. числа  $2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{13}$ , и поймем, на какое наименьшее количество свободных множеств можно разбить эти степени двойки. Заметим, что, переходя к показателям степеней двойки, мы получаем следующий вопрос: *на сколько множеств, свободных от сумм, можно разбить числа от 1 до 13?* (Множество называется *свободным от сумм*, если оно не содержит сумму никаких двух своих элементов, в том числе совпадающих.)

Легко заметить, что уже числа 1, 2, 3, 4 и 5 нельзя разбить на два множества, свободные от сумм. В самом деле, если 1 — в первом множестве, то  $2 = 1 + 1$  — во втором, а  $4 = 2 + 2$  — опять в первом. Значит,  $5 = 4 + 1$  во втором, и в какое бы множество мы ни добавили 3, возникнет противоречие: в первом —  $1 + 3 = 4$ , во втором —  $2 + 3 = 5$ .

Пример на три множества выглядит следующим образом:  $\{1, 4, 7, 10, 13\}$ ,  $\{2, 3, 11, 12\}$ ,  $\{5, 6, 8, 9\}$ . Сразу заметим, что эти множества обладают более сильным условием: если числа  $k$  и  $\ell$  (возможно, совпадающие) лежат в одном множестве, то числа  $k + \ell$  и  $k + \ell + 1$  в нем не лежат.

Осталось заметить, что наше распределение степеней двойки порождает и распределение для всех остальных чисел. Для этого будем к каждой степени двойки  $2^k$  добавлять отрезок  $[2^k, 2^{k+1} - 1]$ , т.е. отрезок, начинающийся данной степенью двойки и заканчивающийся перед следующей степенью. Например, множество  $\{5, 6, 8, 9\}$  порождает множество  $[2^5, 2^7 - 1] \cup [2^8, 2^{10} - 1]$ . Легко видеть, что это разбиение подходит. В самом деле, если числа  $a$  и  $b$  лежат в одном из получившихся множеств разбиения  $A$ , то  $2^k \leq a \leq 2^{k+1} - 1$  и  $2^\ell \leq b \leq 2^{\ell+1} - 1$  для некоторых натуральных  $k$  и  $\ell$ . Тогда  $2^{k+\ell} \leq ab \leq 2^{k+\ell+2} - 2^{k+1} - 2^{\ell+1} + 1 < 2^{k+\ell+2}$ . Поскольку числа из отрезков  $[2^{k+\ell}, 2^{k+\ell+1} - 1]$  и  $[2^{k+\ell+1}, 2^{k+\ell+2} - 1]$  не лежат в  $A$ , то и произведение  $ab$  в нем не лежит, что и требовалось доказать.

*Замечание.* Пример можно построить и по-другому. Для этого для каждого натурального числа  $n$  вычислим количество его простых делителей (не обязательно различных). Тогда можно разбить наши числа на свободные множества по количеству простых делителей: в первое свободное множество отнесем числа, которые содержат 1, 4, 7, 10 или 13 простых делителей, во второе — 2, 3, 11 или 12, а в третье — 5, 6, 8 или 9. Легко видеть, что такое разбиение также подходит.

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного

решения используются следующие критерии:

1. Доказано, что двух множеств недостаточно — 2 балла.
2. Построено верное разбиение степеней двоек на свободные множества — 2 балла.
3. Указано, что разбиение можно проводить по количеству простых делителей, но дальнейшие продвижения отсутствуют — 1 балл.
4. Построен верный пример, но не доказана оценка — 5 баллов.
5. Решение в целом верное, но при построении примера допущена ошибка при разбиении чисел от 1 до 13 на множества, свободные от сумм — 5 баллов.